Intégrales et théorème d'approximation.

Prop Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{R})$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

il existe alors une fonction en escalier φ telle que

$$|f-\varphi| \leq \varepsilon \quad \text{ie} \quad \forall x \in [a,b] \ |f(x)-\varphi(x)| \leq \varepsilon$$

Preuve. 1) cas des fonctions continues

soit $\varepsilon > 0$, d'après le théorème de Heine, f est uniformt continue sur $[a,b]$, donc $\exists \eta > 0$

$$\forall (x,y) \in [a,b] \quad |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon \text{ dès que } |x-y| \leq \eta$$

- Fixons ce η. Alors $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 \leq \frac{b-a}{N} \leq \eta$
- fixons ce N.

on note $a_k = a + \frac{k(b-a)}{N}$ $\forall k \in [\![0, N]\!]$ et

φ la fonction en escalier sur $[a,b]$ tq

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(a_k) & \text{si } k \in [\![0, N-1]\!] \text{ et } x \in [a_k, a_{k+1}[\\ f(b) & \text{si } x = b \end{cases}$$

Il est clair que $f(b) - \varphi(b) = 0$

$\forall x \in [a,b[$, il existe k tq $x \in [a_k, a_{k+1}[$

et puisque $|x - a_k| \leq \frac{b-a}{N} \leq \eta$

alors $|f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(a_k)| \leq \varepsilon$

donc φ répond au problème.

2) cas des fonctions continues par morceaux.

soit $\sigma = (a_0, \dots a_n)$ une subdivision adaptée à f sur $[a,b]$

et notons $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$ la restriction $f_i = f|_{]a_i, a_{i+1}[}$

20

De plus $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$ $\tilde{f_i}$ prolongement par continuité de f_i sur $[a_i, a_{i+1}]$

Soit $\varepsilon > 0$, d'après la 1ère partie de l'étude

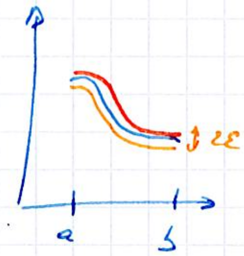
$\exists\, \varphi_i$ en escalier $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$ telle que $|\tilde{f_i} - \varphi_i| \leq \varepsilon$

Considérons la fonction φ définie sur $[a, b]$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_k(x) & k \in [\![0, n-1]\!] \text{ et } x \in]a_i ; a_{i+1}[\\ f(a_k) & \text{si } x = a_k \text{ et } k \in [\![0, n]\!] \end{cases}$$

donc φ répond au problème.

Rq le point important est que l'inégalité $|f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$ est vraie $\forall x \in [a, b]$



Corollaire. Soit $f \in C_{pm}([a,b], \mathbb{R})$. Il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{E}([a,b], \mathbb{R})$ tq

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi_n(x)| \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

Preuve. avec le th précédent

$\varepsilon = \dfrac{1}{n+1}$, $\exists\, \varphi_n$ tq $|f - \varphi_n| \leq \dfrac{1}{n+1}$ et (φ_n) convient.

On définit alors l'intégrale.

Th Soit $f \in C_{pm}([a,b], \mathbb{R})$

Il existe au moins une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escalier telle que $\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi_n(x)| \xrightarrow[+\infty]{} 0$ (*)

De plus

- Pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (*), la suite $\left(\int_a^b \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge
- la limite de cette suite d'intégrale ne dépend pas du choix de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On appelle intégrale de f cette limite et l'on note $\int_{[a,b]} f$.

<u>Preuve</u> : l'existence est assurée par le corollaire précédent

soit $\alpha_n = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi_n(x)| \quad \forall n\in\mathbb{N}$

* Montrons que la suite $\left(\int_a^b \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

En effet $|f|$ est bornée par R

$\forall x\in[a,b] \ \forall n\in\mathbb{N}$

$$|\varphi_n(x)| = |f(x) + (\varphi_n(x) - f(x))| \leq |f(x)| + |f(x) - \varphi_n(x)|$$
$$\leq R + \alpha_n$$

Par passage à l'intégration sur des fonctions en escaliers

$$\left|\int_a^b \varphi_n\right| \leq (b-a)(R+\alpha_n)$$

Comme $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est bornée

D'après le théorème de Bolzano-Weierstraß

$\exists\, \psi$ extraction telle que $\left(\int_a^b \varphi_{\psi(n)}\right)$ soit convergente

Notons L sa limite

Par ailleurs, $\forall x\in[a,b] \ \forall n\in\mathbb{N}$

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{\psi(n)}(x)| \leq |\varphi_n(x) - f(x)| + |f(x) - \varphi_{\psi(n)}(x)|$$
$$\leq \alpha_n + \alpha_{\psi(n)}$$

Par conséquent $\left|\int_a^b \varphi_n - \int_a^b \varphi_{\psi(n)}\right| = \left|\int_a^b (\varphi_n - \varphi_{\psi(n)})\right| \leq (b-a)(\alpha_n + \alpha_{\psi(n)})$

puisque $\alpha_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$ et par extraction $\alpha_{\varphi(n)} \xrightarrow[+\infty]{} 0$

on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b \varphi_n = L$

- Soit $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une autre suite de fonctions en escalier tq

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - \psi_n(x)| \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

Soit $\beta_n = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - \psi_n(x)| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in [a,b] \quad |\varphi_n(x) - \psi_n(x)| \leq |\varphi_n(x) - f(x)| + |f(x) - \psi_n(x)|$$
$$\leq \alpha_n + \beta_n$$

par passage à l'intégrale.

$$\left| \int_a^b \varphi_n - \int_a^b \psi_n \right| \leq (b-a)(\alpha_n + \beta_n)$$

donc $\int_a^b \varphi_n - \int_a^b \psi_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$

et $\left(\int_a^b \varphi_n\right)$ et $\left(\int_a^b \psi_n\right)$ ont la même limite.