Intégrales de Riemann et Bertrand

RIEMANN

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$

Preuve : $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[1;+\infty[$

pour $\alpha \neq 1$, $x \geq 1$

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \int_1^x t^{-\alpha}\,dt = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^x = \frac{1 - x^{1-\alpha}}{-(1-\alpha)}$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = +\infty$ pour $\alpha < 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \text{ pour } \alpha > 1$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$

BERTRAND

$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge ssi $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1, \beta > 1)$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge ssi $\alpha < 1$ ou $(\alpha = 1, \beta > 1)$

Preuve : Soit $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est continue et positive sur $[2;+\infty[$

le théorème de comparaison s'applique.

Soit $\gamma \in]1, \alpha[$, $t^\gamma f(t) = \dfrac{1}{t^{\alpha-\gamma} (\ln t)^\beta}$ avec $\alpha - \gamma > 0$

on a $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\gamma f(t) = 0$ par croissances comparées

d'où $f(t) = o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$ au voisinage de $+\infty$

donc $B_{\alpha,\beta}$ converge par comparaison aux intégrales de Riemann. puisque $\gamma > 1$

Pour $\alpha < 1$, on a $t f(t) = \dfrac{t^{1-\alpha}}{(\ln t)^\beta}$ avec $1-\alpha > 0$

donc $\lim\limits_{t\to\infty} t f(t) = +\infty$

d'où $B_{\alpha,\beta}$ diverge par comparaison aux séries de Riemann.

Pour $\alpha = 1$ et $x > 2$, changement de variable $t = e^u$

$$\int_2^x \frac{dt}{t(\ln t)^\beta} = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{du}{u^\beta}$$

comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, d'après les intégrales de Riemann

que $B_{1,\alpha}$ converge ssi $\beta > 1$

<u>Prop</u> <u>Règle « $x^\alpha f(x)$ » en $+\infty$</u>

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$, $f \in C_{pm}([a,+\infty[, \mathbb{R}) \geq 0$

1) S'il existe $\alpha \in]1;+\infty[$ tel que $x^\alpha f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors f est intégrable sur $[a,+\infty[$

2) S'il existe $\alpha \in]-\infty, 1]$ tel que $x^\alpha f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors f n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$

<u>Preuve</u> - il existe $c \in [a,+\infty[$ tq $\forall x \in [c,+\infty[$

$$0 \leq x^\alpha f(x) \leq 1$$

d'où $\forall x \in [c,+\infty[\quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^\alpha}$

conclusion par Riemann et domination.

2) il existe $c \in [a, +\infty[$ $\forall x \in [c, +\infty[$ $x^\alpha f(x) \geq 1$

d'où $\forall x \in [c, +\infty[$ $f(x) \geq \frac{1}{x^\alpha}$

Par la contraposée du th. de domination et Riemann en $+\infty$

puisque $\alpha < 1$

<u>Prop</u>. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tq $a<b$, $f \in C_{pm}(]a, b], \mathbb{R}) \geq 0$

1) S'il existe $\alpha \in]-\infty, 1[$ tel que $(x-a)^\alpha f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} 0$ alors

f est intégrable sur $]a, b]$

2) S'il existe $\alpha \in [1, +\infty[$ tel que $(x-a)^\alpha f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} +\infty$ alors

f n'est pas intégrable sur $]a, b]$

<u>Ex</u>. $f : x \mapsto -\ln x$ est intégrable sur $]0, 1]$ car f est continue, $f \geq 0$

et $x^{1/2} f(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$