$I : \mathcal{E}([a,b], E)$ $\quad \forall f \in \mathcal{E}([a,b], E)$

$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$

est l'application linéaire continue sur $\mathcal{E}([a,b], E)$
de norme $(b-a)$

Car $\quad \left\| \int_a^b f(x)\,dx \right\| = \left\| \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1}-a_i) f_i \right\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1}-a_i) \|f_i\|$

$= \int_a^b \|f(x)\|\,dx$

De plus, $\int_a^b \|f(x)\|dx = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1}-a_i) \|f_i\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1}-a_i) \|f\|_\infty$

$= (b-a) \|f\|_\infty$

d'où $\quad \left\| \int_a^b f(x)\,dx \right\| \leq (b-a) \|f\|_\infty$

$\rightarrow$ définition de la continuité sur E

$I(f)$ continue sur $\mathcal{E}$ car $\exists\, M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E \quad \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$

au départ, on prend la norme $\|f\|_\infty$.

et à l'arrivée $\left\| \int_a^b f(x)dx \right\|$ norme d'intégrale.

Norme : $\boxed{\text{norme subordonnée}}$ aux normes $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$

$\|f\| = \sup_{x \in E} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$ $\quad$ norme sur $\mathbb{R}$.