Intégrales à paramètres.
fonctions définies par une intégrale.

I Intégrales définies sur un segment.

f fonction sur $I \times [a,b]$, à valeurs complexes.

on suppose que $\forall x \in I$ $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\, dt$$

Théorème : Si f est continue sur $I \times [a,b]$ alors F est continue
(⚠ continuité sur 2 variables)

Théorème : - Si f admet une dérivée partielle par rapport à x
sur $I \times [a,b]$

- si $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $I \times [a,b]$

alors F est dérivable et même C^1 sur I

et on a $$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt.$$

Corollaire : Si f est continue et admet une dérivée partielle par rapport à x qui est continue et si $u, v : I \to [a,b]$ sont dérivables alors la fonction $G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\, dt$.

est dérivable et $$G'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt + v'(x) f(x, v(x)) - u'(x) f(x, u(x))$$

II Intégrales définies sur un intervalle

$f : I \times J \to \mathbb{C}$.

$f : I \times J \to \mathbb{C}$

Théorème : On suppose que.

- pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J
- pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I
- il existe $g : J \to \mathbb{R}$ intégrable telle que

$$|f(x,t)| \leq g(t) \quad \forall (x,t) \in I \times J \quad \text{(hyp de domination)}$$

Alors $F(x) = \int_J f(x,t)\,dt$ est bien définie sur I et continue

Corollaire. On suppose que :

- pour tout x de I, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J
- pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I
- pour tout segment $[a,b] \subset I$, il existe $g : J \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $|f(x,t)| \leq g(t)$ $\forall (x,t) \in [a,b] \times J$

alors $F(x) = \int_J f(x,t)\,dt$ est définie sur I et continue

Théorème : Soit $f : I \times J \to \mathbb{C}$ telle que

- pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ continue par morceaux et intégrable sur J
- f admet une dérivée partielle par rapport à x sur $I \times J$ telle que $\begin{cases} \forall t \in J & x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ est continue sur } I \\ \forall x \in I & t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ est continue par morceaux sur } J \end{cases}$
- il existe $g : J \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq g(t)$ $\forall (x,t) \in I \times J$

Alors la fonction $F(x) = \int_J f(x,t)\,dt$ est dérivable et même C^1 sur I, et on a

$$F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

III Intégrales impropres.

Théorème : Soit $f : I \times [a,b[\to \mathbb{C}$ continue (des 2 variables) telle que $\int_a^y f(x,t)\,dt$ converge vers $F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$ uniformément par rapport à $x \in I$ lorsque y tend vers b.

Alors F est continue.

Théorème :

Soit $f : I \times [a,b[\to \mathbb{C}$. On suppose que

- pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux
- il existe $x_0 \in I$ tel que $\int_a^b f(x_0,t)\,dt$ converge
- pour tout $(x,t) \in I \times [a,b[$ la fonction f admet une dérivée partielle par rapport à x et la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $I \times [a,b[$
- $\int_a^y \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ converge vers $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ uniformément par rapport à $x \in I$ lorsque $y \to b$

Alors $\forall x \in I$, $F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$ converge

la fonction F est dérivable et même C^1 sur I

et l'on a

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$