Intégrales à paramètres / Fonctions définies par une intégrale.

I intégrales définies sur un segment

$f : I \times [a,b]$, I intervalle, à valeurs dans $\mathbb{C}$

hyp. $\forall x \in I$ $t \mapsto f(x,t)$ cpm

on définit $F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$

Th : si $x \mapsto f(x,t)$ continue et si $t \mapsto f(x,t)$ continue

alors F continue sur I

Th f admet une dérivée partielle par rapport à x sur $I \times [a,b]$

si $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $I \times [a,b]$

Alors F dérivable et C^1 sur I , $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$

Cor : f continue et admet une dérivée partielle par rapport à x qui est continue et si $u, v : I \to [a,b]$ sont dérivables alors

$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,dt$ est dérivable et

$$G'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt + v'(x)\, f(x, v(x)) - u'(x)\, f(x, u(x))$$

II Intégrales définies sur un intervalle

$f : I \times J \to \mathbb{C}$ avec I et J intervalles

Th si $\forall t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ continue sur I / $\forall x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ continue par morceaux sur J.

$\exists g : J \to \mathbb{R}$ intégrable tq $|f(x,t)| \leq g(t)$ $\forall (x,t) \in I \times J$)

Alors $F(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\,dt$ est bien définie et continue

Th (bords), $a \in \bar{I}$

$$\begin{cases} \forall t \in J,\ x \mapsto f(x,t) \text{ continue sur } I \ /\ \forall x \in I,\ t \mapsto f(x,t)\ C_{pm} \text{ sur } J \\ \forall t \in J \quad \lim\limits_{x \to a} f(x,t) = \tilde{f}(t) \end{cases}$$

$\exists g : J \to \mathbb{R}$ intégrable tq $|f(x,t)| \leq g(t)$ $\forall (x,t) \in I \times J$

Alors $F(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\,dt$ est bien définie sur I et $\displaystyle\lim_{x \to a} F(x) = \int_J \tilde{f}(t)\,dt$

Cor $\forall t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est C^0 sur I / $\forall x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ C_{pm} sur J

$\forall$ segment $[a,b] \subset I$, $\exists g : J \to \mathbb{R}$ intégrable tq $|f(x,t)| \leq g(t)$ $\forall (x,t) \in [a,b] \times J$

Alors $F(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\,dt$ est bien définie et continue.

Th $f : I \times J \to \mathbb{C}$

⚠

$\forall t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est C^1 sur I / $\forall x \in I$ $t \mapsto f(x,t)$ C_{pm} et intégrable sur J

Ou

Et f admet une dérivée partielle % à x sur $I \times J$

($\forall t \in J$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I) / $\forall x \in I$ $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ C_{pm} sur J

Ctr-ex pas ⚠ pas intégrable $f(x,t) = \dfrac{\cos(xt)}{1+t^6} + e^{t^2}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$\exists\, g : J \to \mathbb{R}$ intégrable tq $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq g(t)$ $\forall (x,t) \in I \times J$

Alors $F(x) = \int_J f(x,t)\,dt$ est dérivable et même C^1 sur I et on a

$$F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

III Intégrales impropres.

f définie sur $[a,b[$.

Si l'intégrale de f est absolument cv^{te}, ie $\int_a^b |f(x,t)|\,dt$ cv, f est intégrable.

Sinon $\lim_{y \to b^-} \int_a^y f(x,t)\,dt$ converge mais pas absolument.

Th $f : I \times [a,b[\to \mathbb{C}$ continue (des 2 variables)

tq $\int_a^y f(x,t)\,dt$ converge vers $F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$ uniformément

par rapport à $x \in I$ lorsque $y \to b$. $\forall x \in I$, $\left(\int_a^y f(x,t) \xrightarrow[CU]{y \to b} \int_a^b f(x,t)\,dt\right)$

Alors F est continue

| continuité des 2 variables
| ⊕ cvg uniforme par rapport à x

(Ou la convergence uniforme sur tout segment inclus dans I)

Th $f : I \times [a,b[\to \mathbb{C}$

$\forall x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ Cpm

$\exists\, x_0 \in I$ $\int_a^b f(x_0,t)\,dt$ converge.

$\forall (x,t) \in I \times [a,b[$, f admet une dérivée partielle par rapport à x

et $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $I \times [a,b[$

$\int_a^y \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ converge vers $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ uniformément par rapport à

$x \in I$ lorsque y tend vers b.

Alors $\forall\, x \in I$, $F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$ converge. La fonction F

est dérivable et même C^1 sur I et on a

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$