Compléments

$\mathcal{E}([a,b])$ est 1 algèbre unitaire pour les lois usuelles, sous-algèbre unitaire de $\mathbb{R}^{[a,b]}$ c.a.d

$$\begin{cases} 1 \in \mathcal{E}([a,b]) \\ \forall (e_1,e_2) \in \mathcal{E}([a,b])^2 \quad e_1+e_2 \in \mathcal{E}([\,]) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad e_1 e_2 \in \mathcal{E}([\,]) \\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall e \in \mathcal{E}([\,]) \quad \lambda e \in \mathcal{E}([\,]) \end{cases}$$

C_{pm}

L'ensemble C_{pm} est 1 sous-algèbre unitaire de $\mathbb{R}^{[a,b]}$ pour les lois usuelles

$1 \in C_{pm}$

$\forall (f,g) \in C_{pm}^2 \quad f+g \in C_{pm}$

$\qquad\qquad\qquad\quad fg \in C_{pm}$

$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall f \in C_{pm} \quad \lambda f \in C_{pm}$.

De plus $\forall f \in C_{pm}$ $|f| \in C_{pm}$.

<u>Proposition</u> Soit $f \in C_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ $\exists g \in C([a,b],\mathbb{R})$ et $e \in \mathcal{E}([a,b])$ tel que $f = g+e$.

<u>Preuve</u> : par récurrence sur le nombre ν de pts de discontinuité.

- si $\nu=0$, $g=f$ et $e=0$
- si $\nu=1$, soit c le point de discontinuité

on prend g tq $g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in [a,c[\\ \lim\limits_{c^-} f \text{ si } x=c \\ f(x) - (\lim\limits_{c^+} f - \lim\limits_{c^-} f) \text{ si } x \in]c,b] \end{cases}$

g continue en tout pt de $[a,b] \setminus c$

$\begin{cases} \lim\limits_{c^-} g = \lim\limits_{c^-} f \\ g(c) = \lim\limits_{c^-} f \end{cases}$

$\lim\limits_{c^+} g = \lim\limits_{c^+} f - (\lim\limits_{c^+} f - \lim\limits_{c^-} f) = \lim\limits_{c^-} f$ donc g continue en c

$e = f - g$.

∘ Supposons p.p pour ν pts. $f \in C_{pm}$ et $\nu+1$ pts de discontinuité.

On procède cô pour $\nu=1$ $g_1 \in C_{pm}$ admettant ν pts de discontinuité

$e_1 \in \mathcal{E}$ $f = g_1 + e_1$

d'après h_ν de réc. $\exists\, g \in [a,b] \to \mathbb{R}$ contin et $e_2 \in \mathcal{E}$

$g_1 = g + e_2$

d'où $f = g + (e_1 + e_2)$ g contin

$e_1 + e_2 \in \mathcal{E}$.

Th

Approx de C_{pm} sur I segment par application $\mathcal{E}$.

Soit $f \in C_{pm}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe φ et $\psi \in \mathcal{E}$ tq

$\varphi \le f \le \psi$ et $\psi - \varphi \le \varepsilon$.

Preuve idée. utiliser le prop précédente.

$\exists\, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ C^0 et $e_1 : [a,b] \to \mathbb{R} \in \mathcal{E}$ tq

$f = g + e_1$.

on cherche d'abord φ_1 et $\psi_1 \in \mathcal{E}$ tq $\varphi_1 \le g \le \psi_1$

et $\psi_1 - \varphi_1 \le \varepsilon$.

si on pose $\varphi = \varphi_1 + e_1$, $\psi = \psi_1 + e_1$ $\Big\}$ (φ, ψ) convient.

$(\varphi, \psi) \in \mathcal{E}^2$ $\varphi = \varphi_1 + e_1 \le \underbrace{g + e_1}_{= f} \le \psi = \psi_1 + e_1$

et $\psi - \varphi = \psi_1 - \varphi_1 \le \varepsilon$.

$\varepsilon > 0$, cô g est contin sur $[a,b]$, th de Heine g est unif. contin sur $[a,b]$

$\exists\, \eta > 0$ $\forall (x_1, x_2) \in [a,b]^2$ $|x_1 - x_2| < \eta \Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon$

$\exists\, N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{N} < \eta$ (prendre $E\left(\frac{b-a}{\eta}\right) + 1$)

Posons $k \in [\![0, N]\!]$ $a_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$.

soit 1 subdiv régulière $s = (a_k)_{k \in [\![0,N]\!]}$

Pour chaque $k \in [\![0, N-1]\!]$ g est continue sur $[a_k, a_{k+1}]$

de borne. m_k / M_k de g.

On considère les φ_1 et $\psi_1 \in \mathcal{G}$ tq

$$\begin{cases} \forall k \in [\![0, N-1]\!] \ \forall x \in [a_k, a_{k+1}[\quad \varphi_1(x) = m_k \text{ et } \psi_1(x) = M_k \\ \varphi_1(b) = m_{N-1} \text{ et } \psi_1(b) = M_{N-1} \end{cases}$$

il est clair que $\underline{\varphi_1 \leq g \leq \psi_1}$

Soit $k \in [\![0, N-1]\!]$ $\forall (x_1, x_2) \in [a,b]^2$

$(x_1, x_2) \in [a_k, a_{k+1}]^2 \Rightarrow |x_1 - x_2| \leq a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{N} \leq \eta$

$\Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow g(x_1) \leq \varepsilon + g(x_2)$

On fixe $x_2 \in [a_k, a_{k+1}]$ et on prend la borne sup pour $x_1 \in [a_k, a_{k+1}]$

$M_k \leq \varepsilon + g(x_2)$

donc $M_k - \varepsilon \leq g(x_2)$

on passe à la borne inf qd $x_2 \in [a_k, a_{k+1}]$

$M_k - \varepsilon \leq m_k$

d'où $M_k - m_k \leq \varepsilon$

Il en résulte que $\forall k \in [\![0, N-1]\!]$ $\forall x \in [a_k, a_{k+1}[$

$\psi_1(x) - \varphi_1(x) = M_k - m_k \leq \varepsilon$

et où $\psi_1(b) - \varphi_1(b) = M_{N-1} - m_{N-1} \leq \varepsilon$

donc $\underline{\psi_1 - \varphi_1 \leq \varepsilon}$

Il s'ensuit..

Intégrale d'une application continue par morceaux sur 1 segment.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cpm

Notons $\mathcal{G}^- = \{ \varphi \in \mathcal{E}([a,b]) \mid \varphi \leq f \}$

$\mathcal{G}^+ = \{ \psi \in \mathcal{E}([a,b]) \mid f \leq \psi \}$

$\to$ parties de $\mathbb{R}$.

- $\mathcal{G}^-$ est non vide, en prenant $\varepsilon = 1$, il existe $\varphi_0 \in \mathcal{G}^-$ $\mathcal{G}^- \neq \emptyset$
- idem $\mathcal{G}^+$

$\forall \varphi \in A \quad \varphi \leq f \leq \psi_0$

donc $\forall \varphi \in A \quad \int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi_0$ d'où ξ^- est majoré par $\int_a^b \psi_0$

ξ^- est minoré par $\int_a^b \varphi_0$

ξ^- et ξ^+ parties non vides de $\mathbb{R}$, majorée et minorée, ξ^- admet 1 borne sup
ξ^+ —— —— inf.

$\mu_1 = \sup(\xi^-)$
$\mu_2 = \inf(\xi^-)$

Mq $\mu_1 = \mu_2$.

• comme $\forall \varphi \in \xi^- \ \forall \psi \in \xi^+ \quad \varphi \leq \psi$, on fixe φ dans ξ^- et en passant à la borne inf lorsque ψ décrit ξ^+

$\forall \varphi \in \xi^- \quad \int_a^b \varphi \leq \mu_2$

pas à gauche, passage à la borne sup $\mu_1 \leq \mu_2$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists (\varphi, \psi) \in \mathcal{E}([a,b])^2$ tel que $\varphi \leq f \leq \psi$
$\psi - \varphi \leq \varepsilon$

$\varphi \in \xi^-, \psi \in \xi^+ \quad \int_a^b \psi - \int_a^b \varphi \leq \varepsilon(b-a)$

$\mu_2 \leq \int_a^b \psi \leq \varepsilon(b-a) + \int_a^b \varphi \leq (b-a)\varepsilon + \mu_1$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \mu_2 - \mu_1 \leq (b-a)\varepsilon$ donc $(\mu_2 - \mu_1) \leq 0 \quad \mu_2 \leq \mu_1$

donc $\underline{\mu_1 = \mu_2}$

Prop - déf : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cpm.
$\left\{ \int_a^b \varphi \in \xi \mid \varphi \leq f \right\}$ $\left\{ \int_a^b \psi \in \xi \mid f \leq \psi \right\}$ de $\mathbb{R}$ admettent resp. une borne sup et une borne inf dans $\mathbb{R}$, bornes égales.
On appelle intégrale de f sur $[a,b]$ et on note $\int_a^b$ cette borne commune

$$\int_a^b f = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{E}([a,b]) \\ \varphi \leq f}} \left(\int_a^b \varphi \right) = \inf_{\substack{\psi \in \mathcal{E}([a,b]) \\ f \leq \psi}} \left(\int_a^b \psi \right)$$

Prop. algébrique

$I : C_{pm} \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_a^b f$ est 1 forme linéaire

Démo en utilisant le th d'existence de φ, ψ tq $\varphi \le f \le \psi$, $\psi - \varphi \le \varepsilon$

$f \in C_{pm}$. si $f \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f \ge 0$

$f, g \in C_{pm}$ si $f \le g \Rightarrow \int_a^b f \le \int_a^b g$.

$f \in C_{pm}$, $m = \inf_{[a,b]} f$ et $M = \sup_{[a,b]} f$ $\quad m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$

$f \in C_{pm}$, valeur moyenne de f sur $[a,b]$ c'est $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$

$f \in C_{pm}$. $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$ (preuve : $f \le |f|$, $-f \le |f|$; $\int_a^b f \le \int_a^b |f|$, $-\int_a^b f = \int_a^b -f \le \int_a^b |f|$ donc $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$

Corollaire : $f, g \in C_{pm}$ $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$

on a $\left|\int_a^b fg\right| \le \|f\|_\infty \int_a^b |g|$

et $\left|\int_a^b f\right| \le (b-a)\|f\|_\infty$

Prop $f \in C_{pm}$ tq $f \ge 0$ et $x_0 \in [a,b]$ tq f soit continue en x_0 et $f(x_0) > 0$ alors $\int_a^b f > 0$

Chasles : par démo avec le th Soit $\varepsilon > 0$ $\exists \varphi, \psi$ tq $\begin{cases} \varphi \le f \le \psi \\ \psi - \varphi \le \varepsilon \end{cases}$

Sommes de Riemann

$f : [a,b]$ continue.
Les sommes de Riemann relatives à f convergent toutes vers $\int_a^b f$ lorsque le pas de la subdivision tend vers 0, ie

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \alpha > 0$ $\forall \sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a,b]$ et $\delta \le \alpha$ $\forall (\xi_i)_{i \in [\![0, n-1]\!]}$

tel que $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$ $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$ on ait

$$\left| \int_a^b f - \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \right| \leq \varepsilon$$

Preuve grâce au th de Heine, on construit 1 subdivision plus petite que l'écart $\frac{\varepsilon}{b-a}$ qu'on a dans la uniforme continuité (entre $f(x)$ et $f(\xi_i)$)

Rq : Une somme de Riemann ne dépend pas du pas mais dépend de la subdi elle-même et des points ξ_i

2/ Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est k-lipschitzienne ($k \in \mathbb{R}_+$) alors toute subd

$S = (a_0, \dots a_n)$, de pas $p(S)$ et toute famille $(\xi_i)_{i \in [\![0, n-1]\!]}$

$$\left| \int_a^b f - \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} | f(x) - f(\xi_i) | \, dx$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} k \int_{a_i}^{a_{i+1}} |x - \xi_i| \, dx$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} k \int_{a_i}^{a_{i+1}} p(S) \, dx = k (b-a) p(S)$$

$\to$ pas besoin de la convergence uniforme

Corollaire - Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est C^0

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \xrightarrow[\infty]{} \int_a^b f$$

En particulier, si f continue sur $[0,1]$ $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \to \int_0^1 f$

Ex $\lim_{n \to +\infty} n \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k^2}$

$$n \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k^2} = n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(i+n)^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{n}\right)^2} \qquad f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\xrightarrow[+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$