Prop : Une application en escalier $f \in \mathcal{E}([a,b], E)$ peut s'écrire

$$f = \sum_{j \in [\![1,m]\!]} \mathbb{1}_{A_j} \lambda_j$$ où A_j sont des intervalles 2 à 2 disjoints non vides de $[a,b]$

et $\lambda_j \in E$

Prop $\mathcal{E}([a,b],E)$ est 1 sev de $\mathcal{F}([a,b],E)$

$\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ est engendré par les fonctions caractéristiques des sous-intervalles de $[a,b]$.

Prop Soit $f \in \mathcal{E}([a,b],E)$ et $\underline{u} = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ subdivision adaptée à f

si $\forall i \in [\![0,n-1]\!]$ on note $c_i \in E$ la valeur de f sur $]x_i, x_{i+1}[$

alors $\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\, c_i \in E$ ne dépend pas de la subdivision $\underline{u}$

on appelle intégrale de f sur $[a,b]$ et on la note $\int_a^b f$

$f \mapsto \int_a^b f$ est linéaire sur $\mathcal{E}([a,b],E)$ dans E

Fonctions intégrables

Généralisation de l'ensemble des fonctions en escalier

fonctions intégrables toute fonction pouvant être encadrée par des fonctions en escalier « aussi proche que l'on veut »

Deux fonctions f et $g \in \mathcal{E}$ seront proches si $\int_a^b |f-g|$ petit.

D pas une distance car $\int_a^b |f-g| = 0$ et $f \neq g$.

Proche au sens $\|f-g\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|$ petit

→ fonctions réglées

Déf $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$

si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \varphi_\varepsilon$ et ψ_ε sur $[a,b]$ tq

$$\varphi_\varepsilon \le f \le \psi_\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_a^b (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) \le \varepsilon$$

Ex fonction non intégrable au sens de Riemann

$$f : [0,1] \to \mathbb{R} \quad \begin{cases} f(x) = 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ f(x) = -1 \text{ si } x \in \bar{\mathbb{Q}} \end{cases}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{E}_f$ tq $f \leq \varphi$ et $\psi \in \mathcal{E}_f$ tq $\psi \leq f$

Tout intervalle ouvert sur lequel φ est constant contient 1 point rationnel donc $1 \leq \varphi$

Tout intervalle ouvert sur lequel ψ est constante contient 1 point irrationnel donc $\psi \leq -1$

$\exists$ un intervalle $[a,b] \subset [0,1]$ de longueur non nulle tq φ et ψ sont constantes.

$$2(b-a) \leq \int_a^b (\varphi - \psi) \leq \int_0^1 (\varphi - \psi) \quad \text{d'où } f \text{ n'est pas R-intg}$$

Prop : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée

i) L'ensemble $\left\{ \int_a^b \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}_f^+ \right\} \subset \mathbb{R}$ est borné inf., on le note $^*\!\int_a^b f$

ii) L'ensemble $\left\{ \int_a^b \psi \mid \psi \in \mathcal{E}_f^- \right\} \subset \mathbb{R}$ est borné sup. $\int_*{}_a^b f$. intégrale sup.

$\Rightarrow$ Cela conserve toutes les props de linéarité et de comparaison des sommes.

Prop. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, les 2 conditions sont équivalentes

i) f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$

ii) f est bornée et ses intégrales supérieures et inférieures sont égales.

$$\int_a^b f = {}^*\!\!\int_a^b f = \int_{*a}^b f.$$

Prop Toute fonction continue sur 1 segment est intégrable au sens de Riemann.

Prop : $\mathcal{R}([a,b])$ est un sev de $\mathcal{F}([a,b])$ et $f \mapsto \int_a^b f \in \mathbb{R}$ est 1 forme linéaire

Prop : Toutes les propriétés s'en déduisent pour $f \in \mathcal{R}([a,b])$

i) si $f \geq 0$ alors $\int_a^b f \geq 0$

ii) si $f \geq g$ alors $\int_a^b f \geq \int_a^b g$

iii) $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| \leq (b-a) \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$

Preuve iii) on a $f^+ = \sup(0,f)$ $f^- = \sup(-f,0)$ $f = f^+ - f^-$

$|f| = f^+ + f^-$

Autres prop : $f,g \in \mathcal{R}([a,b])$

i) $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont intégrables au sens de Riemann

ii) fg est intégrable au sens de Riemann

Preuve : $\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ $\inf(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$

Relation de Chasles : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$c \in]a,b[$

Pour que f soit R-intégrable, il faut et il suffit que ses restrictions à $[a,c]$ et $[c,b]$ soient R-intég.

Corollaire : Toute fonction continue par morceaux sur 1 segment est intégrable au sens de Riemann sur ce segment.

Prop : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée n'admettant qu'un nombre fini de points de discontinuité, alors f est R-intég.

$\boxed{\text{Généralisation}}$

Prop : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonction. Les 3 conditions suivantes sont équivalentes

i) f est intégrable au sens de Riemann

ii) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ ϕ_ε et $\psi_\varepsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\in \mathcal{E}([a,b])$ tq

$$|f-\phi_\varepsilon| \leq \psi_\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_a^b \psi_\varepsilon \leq \varepsilon$$

iii) il existe deux suites $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{E}([a,b])$ tq

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad |f-\theta_n| \leq \eta_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \eta_n = 0$$

II Sommes de Darboux et Riemann

Def : Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonction bornée

A toute subdivision $\alpha := (x_i)_{i\in[[0,n]]}$, on associe les sommes

$$d_\alpha(f) := \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1}-x_i) \quad \text{et} \quad D_\alpha(f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1}-x_i)$$

avec $m_i = \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} \{f(x)\}$ et $M_i = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} \{f(x)\}$

d_α et D_α sont les sommes de Darboux.

Pour toute fonction bornée, l'intégrale supérieure $^*\int_a^b f$ est en un certain sens la limite des sommes de Darboux $D_\alpha(f)$ quand $\delta(\alpha)\to 0$.

Lemme . $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction bornée et $g\in\mathcal{E}([a,b])$ une fonction en escalier tq $g\leq f$. Pour tout $\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$ tq pour toute subdi α de pas inférieure à δ l'on ait

$$\int_a^b g-\varepsilon \leq d_\alpha(f) \leq {}_*\int_a^b f.$$

On obtient alors

Prop : $d(f) = {}_*\int_a^b f$ et $D(f) = {}^*\int_a^b f$

Corollaire Critère de Darboux

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Les 2 conditions sont équivalentes

i) f est intégrable au sens de Riemann

ii) f est bornée et $\forall\varepsilon>0$, il existe une subdi $\alpha := \{x_i\}$ tq

$$D_\alpha(f) - d_\alpha(f) = \sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i) \leq \varepsilon$$