L1 Romis

$a,b \in \mathbb{R}$ tq $a<b$, f à valeurs réelles

But : définir 1 nombre qui à une fct° positive sur $[a,b]$ associe son aire
ce nombre est appelé intégrale noté $\int_a^b f$.

I Intégrale de fonctions en escalier

A) subdi / pas $\delta(\sigma) = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} (x_i - x_{i-1})$

Relat° d'ordre : plus fine pour la relation d'inclusion.

B) $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R} \in \mathcal{E}$ si on peut trouver σ une subdi tq φ soit constante sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ → adaptée.

Pq
- $f \in \mathcal{E}$ prend 1 nombre fini de valeurs ⇒ donc bornée
- si $f,g \in \mathcal{E}$ alors $\exists\, \sigma$ adaptée à f et g
- $\mathcal{E}([a,b])$ est 1 sev de $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$

C) Intég. d'1 fct° en escalier

Prop $\varphi \in \mathcal{E}([a,b])$ σ adaptée, soit c_i la valeur de φ sur $]x_{i-1},x_i[$
alors $\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) c_i$ ne dépend pas de σ.
on note cette somme $\int_a^b \varphi$.

D) Prop 1) l'intégrale est 1 forme linéaire sur $\mathcal{E}([a,b])$
passage de l'intégrale à chaque somme $\int_{[a,b]} \lambda f + \mu g = \sum (x_i - x_{i-1})(\lambda c_i + \mu d_i)$
avec σ adaptée

2) Toute fct en escalier positive a 1 intégrale positive

3) Si $\varphi \le \psi$ alors $\int_{[a,b]} \varphi \le \int_{[a,b]} \psi$.

4) Chasles : φ escalier sur $[a,b]$ ssi $\varphi_{[a,c]}$ et $\varphi_{[c,b]}$ en escalier.
preuve : par découpage $a \quad c \quad b$ soit $p \in [\![0,n]\!]$ $c = x_p$
$\sigma_{[\![0,p]\!]}$ subdi adaptée à φ sur $[a,c]$ φ est cste $]x_{i-1}, x_i[$ + escalier
$\sigma_{[\![p,n]\!]}$ — à φ sur $[c,b]$ φ est en escalier sur $[c,b]$

$$\int \varphi = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) c_i = \sum_{i=1}^{p} (x_i - x_{i-1}) c_i + \sum_{i=p}^{n} (x_i - x_{i-1}) c_i = \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi.$$

Récip avec 2 subdiv. adaptées sur $[a,c]$ et $[c,b]$
on recolle, φ est constante sur chaque intervalle
donc en escalier.

II Cpm

1) Def $f \in C_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ si $\exists\, \sigma$ tq $f_{]x_{i-1},x_i[}$ soit continue et admet des limites finies en x_{i-1} et x_i.

on dit que σ est adaptée à f.

Rq $f \in C_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ ssi on peut trouver σ subdi tq $f_{]x_{i-1},x_i[}$ se prolonge en une fonct° f_i continue sur $[x_{i-1},x_i]$.

Ctr-ex f définie sur $[-1,1]$ par $f(0)=0$ et $\forall x\neq 0$ $f(x)=e^{1/x}$
n'est pas Cpm car pas de limite à droite qd $x\to 0^+$.

Prop toute fonct° Cpm $([a,b])$ est bornée sur $[a,b]$.

Prop $C_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ sev de $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ stable par produit.

B] Approx fonct° Cpm.

Th Soit $f\in C_{pm}([a,b],\mathbb{R})$, $\forall \varepsilon>0$
- $\exists\, \theta \in \mathcal{E}([a,b])$ telle que $|f-\theta|<\varepsilon$] ajout %Monier
- $\exists\, \varphi,\psi \in \mathcal{E}([a,b])$ tq $\varphi< f\leq \psi$ et $\psi-\varphi\leq\varepsilon$.

(Demo p759 L1 Ramis)

On note $\mathcal{E}^+(f)$ l'ensble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ plus grandes que f
$\mathcal{E}^-(f)$ plus petites.

Prop Si $f\in C_{pm}$ alors $\left\{\int_{[a,b]}\varphi \mid \varphi\in\mathcal{E}^-(f)\right\}$ admet une borne sup ①
$\left\{\int_{[a,b]}\psi \mid \psi\in\mathcal{E}^+(f)\right\}$ —— une borne inf.

et ces 2 bornes sont égales.

Preuve ① $f\in C_{pm} \Rightarrow$ bornée donc $\exists\, M_f\, R$, $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$ ne sont pas vides
$\int_{[a,b]}\varphi \leq \int_{[a,b]} R = R(b-a) \Rightarrow \mathcal{E}^-$ partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée de possède une borne sup ok.

idem pour $\mathcal{E}^-$ partie non vide de $\mathbb{R}$, admet une borne inf pr
$\varphi\in\mathcal{E}^-$ et $\psi\in\mathcal{E}^+$ alors $\int_{[a,b]}\varphi\leq\int_{[a,b]}\psi$.

Soit ψ fixé de $\{\int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^-\}$ était majoré par $\int \psi$, sa borne sup α est plus petite que cette intégrale.

donc α est le minorant de $\{\int \psi \mid \psi \in \mathcal{E}^+\}$, par conséquent il est plus petit que la borne inf de ce dernier, soit $\alpha \leq \beta$.

D'après le th précédent $\exists\, \varphi, \psi$ et $\varepsilon > 0$ tq $\psi - \varphi \leq \varepsilon$.

donc $\int_{[a,b]} \psi - \int_{[a,b]} \varphi \leq \varepsilon(b-a)$

et par déf de α, β $\int_{[a,b]} \varphi \leq \alpha \leq \beta \leq \int_{[a,b]} \psi$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad 0 \leq \beta - \alpha \leq \varepsilon(b-a)$ donc $\underline{\alpha = \beta}$

<u>Déf</u> Si $f \in C_{pm}([a,b], \mathbb{R})$, on appelle intégrale de f sur $[a,b]$, le réel

$$\int_{[a,b]} f = \sup\left\{\int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^-\right\} = \inf\left\{\int_{[a,b]} \psi \mid \psi \in \mathcal{E}^+\right\}.$$

Rq cohérent avec déf sur escalier.

car $f \in \mathcal{E}([a,b]) \Rightarrow f \in C_{pm}$ et son $\int$ en tant que fonction C_{pm} est la même que celle en tant que fonction constante par morceaux.

$f \in \mathcal{E}^+(f) \cap \mathcal{E}^-(f)$, $\int$ escalier est le plus gd élt de $\{\int \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^-\}$ et le plus petit de $\{\int_{[a,b]} \psi \mid \psi \in \mathcal{E}^+\}$

<u>Prop</u> : $f \in C_{pm}$, pour toute suite (ε_n) à valeurs > 0 et $\varepsilon_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$

$\exists$ une suite θ_n tq

$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall t \in [a,b] \ |f(t) - \theta_n(t)| \leq \varepsilon$ (*)

on a alors $\int_{[a,b]} f(t)\, dt = \lim_{n \to +\infty} \int_{[a,b]} \theta_n$.

important d'avoir $\theta_n(t)$

III Prop de l'intégrale

Les prop se déduisent par passage à la limite de celles des fonctions en escalier.

Prop : $\int$ est 1 forme linéaire sur l'ev des f° $C_{pm}([a,b],\mathbb{R})$

Ex 2 f° cpm qui sont égales sauf en 1 nombre fini de points ont la m̂ $\int$ car leur diff qui est nulle sauf en 1 nb fini de p^ts est 1 fonction en escalier d'où l'intégrale est nulle.

Prop (Chasles) : soit $c \in]a,b[$, $f \in C_{pm}([a,b])$ ssi $f_{[a,c]}$ et $f_{[c,b]}$ sont cpm et alors $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

Preuve : on utilise ⊗

Prop Inégalités. $f \in C_{pm}([a,b])$ positive $\Rightarrow \int_{[a,b]} f \geq 0$

$f,g \in C_{pm}$, $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$

Prop 2 : inégalité de la moyenne
$f \in C_{pm}$ alors $|f| \in C_{pm}$ et $\left|\int f\right| \leq \int |f| \leq (b-a) \sup_{[a,b]} |f|$

Def : on appelle valeur moyenne de $f \in C_{pm}$ sur $I=[a,b]$ le réel

$$\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$$

Th Cauchy-Schwarz
$f,g \in C_{pm}$ on a $\left(\int fg\right)^2 \leq \left(\int f^2\right)\left(\int g^2\right)$

Preuve étude de $\int (f+\lambda g)^2 = P(\lambda)$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ P(\lambda) \geq 0$

Th Une fonction f continue et positive sur $[a,b]$ est nulle ssi $\int_{[a,b]} f = 0$

Sommes de Riemann

on appelle somme de Riemann à gauche associée à f sur $[a,b]$, la q.

$$S_n(f,[a,b]) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$$

Th $f \in C_{pm}([a,b])$, la suite $\left(S_n(f,[a,b])\right)_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{[a,b]} f$

Ex $\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$.

$$S_n = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{n} \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\pi/n}\right) = \frac{\pi}{n}\operatorname{Im}\left(\frac{1-e^{i\pi}}{1-e^{i\pi/n}}\right)$$

$$= \frac{\pi}{n} \times \operatorname{Im}\left(\frac{2}{(-2i)\sin(\pi/2n)}\right) = \frac{i\pi}{n}\operatorname{Im}\left(\frac{e^{-i\pi/2n}}{\sin(\pi/2n)}\right)$$

$$S_n = \frac{\pi}{n}\,\frac{\cos(\pi/2n)}{\sin(\pi/2n)}$$

or $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ d'où $\lim \frac{\pi/n}{\sin(\pi/2n)} = 2$ donc $\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = 2$

Th fondamental de l'analyse

Def f admet 1 primitive sur I s'il existe une appli dérivable $F : I \to \mathbb{R}$.
tq $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$

(**Rq** avec accroissements finis, 2 primitives d'1 même fonction diffèrent d'1 cte)

Rq Tangente et aire sont liés !

Th de Cauchy : toute fn continue sur I admet 1 primitive
plus précisément, la primitive de f s'annulant en $a \in I$ est
l'application $F : I \to \mathbb{R}$
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Preuve : $c \in I$, par continuité de f $\exists \delta > 0$ $\forall x \in I$ $|x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(c)| < \varepsilon$
or pour $x \in I$ et $h = x-c$
$$|F(c+h) - F(c) - hf(c)| \leq \left|\int_c^{c+h} (f(t) - f(c))\,dt\right| \leq \int_c^{c+h} |f(t) - f(c)|\,dt$$
$$\leq |h|\,\varepsilon$$
d'où F est dérivable et $f(c) = F'(c)$.

Th fondamental

Soit f continue dérivable sur I. Alors $\forall \alpha, \beta \in I$

$$\int_\alpha^\beta f'(t)\,dt = f(\beta) - f(\alpha)$$

Corollaire – f C^0 sur I. F primitive de f alors

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Th d'IPP $\quad h = fg$, continue dérivable $h' = f'g + g'f$

Th fond. $\Rightarrow$ $[h(x)]_a^b = \int_a^b h'(x)\,dx = \int_a^b f(x) g'(x)\,dx + \int_a^b f'g.$

chgt de variable $\quad \varphi$ cont. dérivable de I sur J.

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b (f\circ\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

preuve $\quad F$ primitive de f sur J. $\quad G = F\circ\varphi$

G est dér. et df. $\quad G' = (\varphi')(F'\circ\varphi)$

$= \varphi'(f\circ\varphi)$

$$F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = G(b) - G(a) = \int_a^b G'(t)\,dt = \int_a^b ((f\circ\varphi)(t))\varphi'(t)\,dt$$

Δ dans l'autre sens, θ cont. dérivable sur J.

$\forall x \in J \quad \theta'(x) \neq 0.$

θ déf un bijection de J sur I et récip. cont. dérivable.

chgt variable à $\varphi = \theta^{-1}$

soit $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_{\theta(\alpha)}^{\theta(\beta)} f(\theta^{-1}(t))\,(\theta^{-1})'(t)\,dt.$

Ex calcul de l'aire d'1 disque $R>0$

coordonnées cartésiennes, disque a pour équation $x^2+y^2 \leq R^2$

On ne prend que les valeurs positives de y, soit le demi-disque

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ $\quad -R \leq x \leq R$ et $0 \leq y \leq \sqrt{R^2-x^2}$

c'est de la surface sous la courbe $f(x) = \sqrt{R^2-x^2}$ dans

l'intervalle $[-R, R]$

c'est une fonction positive, l'aire A est égale à $\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx$ (7)

changement de variable $x = R\cos t$

d'où $t \in [0,\pi]$ $\varphi(t) = R\cos t$ est continûment dérivable sur $[0,\pi]$

et $\sqrt{R^2-x^2} = R\sin t$ car $\sin(t) \geq 0$ sur $[0,\pi]$

avec $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$.

$$A = \int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx = \int_{\pi}^{0}(R\sin t)(-R\sin t)\,dt$$

$$= R^2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{\pi R^2}{2}$$

d'où l'aire du disque $= \pi R^2$.