Palko ex 93 p426

Fonction défini par une intégral.

– Intégrale impropre.

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction de la variable réelle $F : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{\text{Arctan}(x \tan\theta)}{\tan\theta}\, d\theta$

b) Calculer $F(x)$

c) En déduire les valeurs de $\int_0^{\pi/2} \frac{\theta}{\tan\theta}\, d\theta$ et $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin\theta)\, d\theta$

On directement $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin\theta)\, d\theta$ en utilisant la fonction

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\text{Arctan}(x\tan\theta)}{\tan\theta}\, d\theta$$

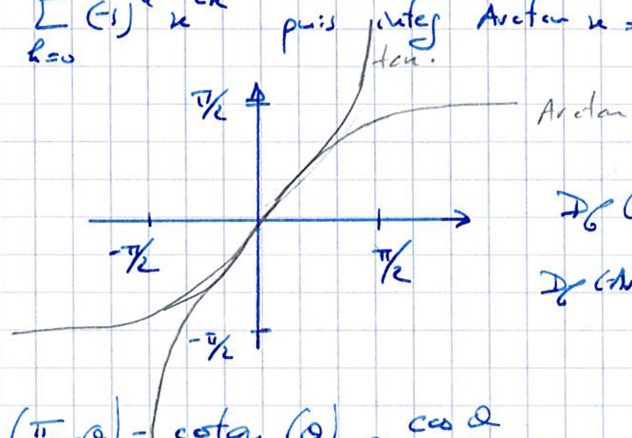
Remarque générale sur tan / Arctan.

DL en 0 d'Arctan $(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$

$\rightarrow$ preuve $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$

$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}$ puis intég $\left(\text{Arctan } x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt\right)$

Courbe représentative :



$D_f(\tan) =]-\pi/2 ; \pi/2[$

$D_f(\text{Arctan}) = \mathbb{R}$

Formule trigo $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{cotan}(\theta) = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\cos(\theta)}{\sin\theta}.$$

Si $\theta \to \frac{\pi}{2}^-$, alors $\tan(\theta) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - h\right) \underset{h\to 0^+}{\sim} \frac{\cos h}{\sin h} = \frac{1}{h} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \theta}$

a) Soit $\varphi : \mathbb{R} \times]0;\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$

$$(x,\theta) \mapsto \frac{\mathrm{Arctan}(x \tan\theta)}{\tan\theta}$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$. $\varphi_x : \theta \mapsto \varphi(x,\theta)$ est continue sur $]0,\frac{\pi}{2}[$

or DL en 0, $\mathrm{Arctan}\,\theta \underset{0}{\sim} \theta$

donc $\varphi_x(\theta) \underset{0}{\sim} \frac{x\tan\theta}{\tan\theta} = x$ $\to$ pas de problème en 0

En $\frac{\pi}{2}$, décomposons selon les valeurs de x :

i) $x=0$ $\mathrm{Arctan}(x\tan\theta) = 0$ donc $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\mathrm{Arctan}(x\tan\theta)}{\tan\theta} = 0$

ii) $x>0$, $\theta = \frac{\pi}{2} - h$

et on étudie $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} \text{—} = \lim\limits_{h\to0^+} \text{——}$

$\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} \mathrm{Arctan}(x\tan\theta) = \lim\limits_{h\to0^+} \mathrm{Arctan}\left(x\tan\left(\frac{\pi}{2}-h\right)\right)$

$= \lim\limits_{h\to0^+} \mathrm{Arctan}(x\,\mathrm{cotan}\,h)$ et $\underset{0}{\lim}$ cotan $h \sim \frac{1}{h}$

$= \frac{\pi}{2}$

donc $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\mathrm{Arctan}(x\tan\theta)}{\tan\theta} = 0$

iii) $x<0$, $\theta = \frac{\pi}{2} - h$, seule différence $\lim\limits_{h\to0^+} \mathrm{Arctan}(x\,\mathrm{cotan}\,h) = -\pi/2$

et $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\mathrm{Arctan}(x\tan\theta)}{\tan\theta} = 0$

(De plus $\forall \theta \in]0,\frac{\pi}{2}[$ $\varphi : x \mapsto \frac{\mathrm{Arctan}(x\tan\theta)}{\tan\theta}$ est continue sur $\mathbb{R}$)

donc <u>φ_x est intégrable</u> sur $]0,\frac{\pi}{2}[$

donc F est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Calcul de $F(x)$. Utilisation du théorème de dérivation sous le signe $\int$.

- Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $\varphi_x : \theta \mapsto \varphi(x,\theta)$ est intégrable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$
- Pour $\theta \in]0,\frac{\pi}{2}[$, $\varphi_\theta : x \mapsto \varphi(x,\theta)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- dérivée partielle $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,\theta) = \frac{1}{\tan\theta} \frac{\tan\theta}{1+x^2\tan^2\theta} = \frac{1}{1+x^2\tan^2\theta}$

cette fonction est continue sur $\mathbb{R} \times]0, \frac{\pi}{2}[$

- domination.

$\forall (x,\theta) \in \mathbb{R} \times]0, \frac{\pi}{2}[\quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,\theta) \right| \leq 1$

et la fonction constante, égale à 1 est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

Donc $F : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \varphi(x,\theta)\, d\theta$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

et $\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,\theta)\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+x^2\tan^2\theta}\, d\theta$

(th d'interversion $\int$ et $\frac{d}{dx}$ par domination)

changement de variable $u = \tan\theta$.

La fonction $u : \theta \mapsto \tan\theta$ est un C^1-difféomorphisme de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}_+^*$. $du = 1+\tan^2\theta\, d\theta = (1+u^2)\, d\theta$

Il vient $\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2u^2} \times \frac{1}{1+u^2}\, du$

Rq F est impaire, donc en trouvant la solution sur $\mathbb{R}_+^*$, on l'aura sur $\mathbb{R}_-^*$.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, faisons une décomposition en éléments simples de $\frac{1}{1+x^2u^2} \times \frac{1}{1+u^2}$ (variable u^2)

On cherche $\frac{1}{(1+x^2u^2)(1+u^2)} = \frac{\alpha}{1+x^2u^2} + \frac{\beta}{(1+u^2)}$

on a le système $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ u^2(\alpha + \beta x^2) = 0 \end{cases}$

On obtient $\alpha = 1-\beta$ et $\beta = -\frac{1}{x^2-1}$

soit $\alpha = \frac{x^2}{x^2-1}$

$$\frac{1}{(1+x^2u^2)(1+u^2)} = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{x^2}{1+x^2u^2} - \frac{1}{1+u^2}\right) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$$

Primitive de $\begin{cases} \dfrac{x^2}{1+x^2u^2} \longrightarrow x \operatorname{Arctan}(xu) \\ \dfrac{1}{1+u^2} \longrightarrow \operatorname{Arctan}(u) \end{cases}$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ $\quad F'(x) = \dfrac{1}{x^2-1}\left(x\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{x+1}$

Comme F' est continue sur $\mathbb{R}_+$ (pas de pb en 1)

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad F'(x) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{x+1}$$

Par intégration $\exists\, K \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}_+$

$$F(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x) + K$$

et $F(0) = 0$ donc $K = 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ , \ F(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x)$$

Par imparité $\forall x \in \mathbb{R}_- , \ F(x) = -\dfrac{\pi}{2}\ln(1-x)$

c) $F(1) = +\dfrac{\pi}{2}\ln(2)$ et $F(1) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{Arctan}(\tan\theta)}{\tan\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{\theta}{\tan\theta}\,d\theta$

d'où $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\theta}{\tan\theta}\,d\theta = +\frac{\pi}{2}\ln 2$

IPP. $u = \theta \quad u' = 1$

$v = \ln(\sin\theta) \quad v' = \dfrac{1}{\tan\theta}$

$$\int_\varepsilon^A \frac{\theta}{\tan\theta}\,d\theta = \Big[\theta\ln(\sin\theta)\Big]_\varepsilon^A - \int_0^{\pi/2}\ln(\sin\theta)\,d\theta$$

$\lim\limits_{A\to\frac{\pi}{2}} \theta\ln(\sin A) = 0$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \theta\ln(\sin\theta) \underset{0}{\sim} \theta\ln\theta$

par croissance comparée $\underset{\theta\to 0}{\longrightarrow} 0$

d'où $+\dfrac{\pi}{2}\ln 2 = -\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\sin\theta)\,d\theta$

donc $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\sin\theta)\,d\theta = \frac{-\pi}{2}\ln 2$.

Q : $\theta \mapsto \ln(\sin\theta)$ est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$

en $\frac{\pi}{2}$, pas de souci : comme l'adh. l'intervalle.

en 0, $\sin\theta \sim \theta$ et $\ln\theta$ est intégrable sur $]0,1]$.

Plus propre : (Rodot p 315)

$$\frac{\sin t}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$

$$\frac{\ln(\sin t)}{\ln t} = \frac{\ln\left(\frac{\sin t}{t} \times t\right)}{\ln t} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)}{\ln(t)} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$

donc $\ln(\sin t) \underset{0}{\sim} \ln t$

Or $\int_0^{\pi/2} \ln t \, dt$ converge car $\int_0^{\pi/2} \ln t = \left[t\ln t - t\right]_0^{\pi/2}$
$= \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$.

donc $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\, dt$ converge.

Q2. On pose $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\, dt$. Mq $I = J = -\frac{\pi}{2}\ln 2$

changement de variable C^1 et strictement décroissant.

$t = \frac{\pi}{2} - u$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\, dt$ est de même nature que $\int_{\pi/2}^{0} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)(-du)$

$$= \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(u))\, du$$

donc les 2 intégrales convergent et $I = J$

changement de variable C^1, croissant $t = \frac{u}{2}$ sur $[0, \pi]$

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t))\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\, du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2} \ln(\sin u)\, du + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\cos u)\, du\right)$$

Nouveau changement de variable C^1, strict. croissant $u = x + \frac{\pi}{2}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin u)\, du = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\, dx$$

donc $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t)\, dt = \frac{1}{2}(I + J) = I$

donc $\displaystyle I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t)\, dt = \int_0^{\pi/2} \ln(2 \sin t \cos t)\, dt$

$$= \int_0^{\pi/2} \ln 2\, dt + \int_0^{\pi/2} \ln \sin t\, dt + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\, dt$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln 2 + I + J$$

donc $I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.