Dev : intégrale de Dirichlet comme intégrale à paramètre

X-ENS Analyse T3 p214

En étudiant la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t}\, dt$, calculer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

Preuve : Existence et définition de l'intégrale à paramètre.

Soit $f : (x,t) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,t) \mapsto e^{-xt} \frac{\sin t}{t}$$

Pour $x > 0$, la fonction $f(x,.)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisqu'elle se prolonge par continuité en 0 $\quad f(x,0) = 1$

et pour $t \to +\infty \quad f(x,t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Montrons que F est bien définie en 0

Par IPP, $X \geq 1$

$$\int_1^X \frac{\sin t}{t}\, dt = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos(t)}{t^2}\, dt$$

or la fonction $t \mapsto \frac{\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ $\left(\underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)$

L'intégrale entre 1 et X admet une limite quand $X \to +\infty$

donc F est définie en 0

⚠ $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$

En effet, si tel était le cas, comme $\sin^2 t \leq |\sin t|$

la fonction serait intégrable sur $[1; +\infty[$. Or ce n'est pas le cas car $\int_1^X \frac{\sin^2 t}{t}\, dt = \int_1^X \frac{1 - \cos 2t}{2t}\, dt = \frac{\ln X}{2} - \int_1^X \frac{\cos 2t}{t}\, dt$

Or $\int_0^X \frac{\cos 2t}{t}\, dt = \int_2^{2X} \frac{\cos u}{u}\, du$.

marque ½ ?

Puis IPP $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ converge

Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ converge sans que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ soit intégrable

- Montrons que F est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

La fonction f est C^∞ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt}\sin t \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^{*2}$

Soit pour $a > 0$, $\forall x \geq a$

$\forall t > 0 \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt}|\sin t| \leq e^{-at}$

comme $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est dominée

donc F est C^1 sur $]a;+\infty[$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, on a $F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t\,dt = -\operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-xt}e^{it}\,dt\right)$

$$= -\operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(x-i)t}\,dt\right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{i-x}\right) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$\exists C \in \mathbb{R} \quad \forall x > 0 \quad F(x) = C - \operatorname{Arctan} x$.

Comme $|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$

d'où $C = \frac{\pi}{2}$

<u>CCL</u> $\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x$

- Montrons que $F(0) = \frac{\pi}{2}$

Il faut vérifier que F est continue en 0

Comme $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable $\to$ pas de convergence dominée!

On va faire une IPP aux 2 bornes impropres.

Partageons $F_1(x) = \int_0^1 e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,dt$ et $F_2(x) = \int_1^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,dt$

• Pour F_1

on sait que $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt}\,|\sin t| \leq 1$ pour $x \in]0,1]$

et 1 est intégrable sur $]0,1]$.

$\Rightarrow F_1$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+$

• Pour F_2, F_2 est la partie imaginaire de $G(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t}\,dt$.

IPP, pour $X \geq 1$

$$\int_1^X \frac{e^{-(x-i)t}}{t}\,dt = \left[\frac{1}{i-x}\,\frac{e^{-(x-i)t}}{t}\right]_1^X + \frac{1}{i-x}\int_1^X \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}\,dt$$

$\left|\dfrac{e^{-(x-i)t}}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$ (Riemann) $t \mapsto \dfrac{e^{-(x-i)t}}{t^2}$ est intégrable

et $G(x) = \dfrac{e^{i-x}}{x-i} + \dfrac{1}{i-x}\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}\,dt$

La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}\,dt$ est continue

car 1) $(x,t) \mapsto \dfrac{e^{-(x-i)t}}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times [1;+\infty[$

2) $\left|\dfrac{e^{-(x-i)t}}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$ domination.

donc G est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc F_2 aussi

et donc F aussi

D'où $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$