X-ENS T3 Analyse p 217

Dev : Intégrale de Dirichlet

version eq diff.

Soit $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt$ où $x \geq 0$

1) Vérifier que φ est continue sur $[0, +\infty[$ et C^∞ sur $]0; +\infty[$

Calculer pour $x > 0$ $\varphi(x) + \varphi''(x)$ puis $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x)$

2) Montrer que pour tout $x > 0$ $\varphi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\, dt$

3) En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} = \frac{\pi}{2}$

Preuve : 1) $(x,t) \in \mathbb{R}_+^2$ $f(x,t) = \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$

c'est une fonction C^∞

Pour tout $x \geq 0$ $|f(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$

théorème de continuité sur les intégrales à paramètres

: φ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$

On a $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^2$, $\forall k > 0$ $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = \frac{(-1)^k e^{-xt} \times t^k}{1+t^2}$

Fixons $a > 0$, si $x \geq a$

$\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \right| \leq \frac{e^{-ta}\, t^k}{1+t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

on fait de même par récurrence, φ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$

et en combinant, pour tout $x > 0$

$\varphi(x) + \varphi''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}(1+t^2)}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\, dt = \frac{1}{x}$

De plus $0 \leq \varphi(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx}\, dt = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$

$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$

2) Fixons $x>0$, montrons l'existence de $\varphi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,dt$

pour $X \geqslant x$ $\int_x^X \frac{\sin(t-x)}{t}\,dt \underset{\substack{\text{chasles}\\ + \text{trigo}}}{=} \int_x^X \frac{\sin t \cos x}{t}\,dt - \int_x^X \frac{\cos t \sin x}{t}\,dt$

$$= \cos x \int_x^X \frac{\sin t}{t}\,dt - \sin x \int_x^X \frac{\cos t}{t}\,dt$$

Les 2 intégrales ont une limite en $+\infty$ si $\int_x^X \frac{e^{it}}{t}\,dt$ converge

Petit lemme : $X \geqslant x$, par IPP

$$\int_x^X \frac{e^{it}}{t}\,dt = \left[\frac{e^{it}}{it}\right]_x^X - \int_x^X \frac{e^{it}}{i}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

- On a $\left|\frac{e^{iX}}{iX}\right| \leq \frac{1}{X} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$

  donc le [ ] admet $\frac{e^{ix}}{ix}$ comme limite quand $X \to +\infty$

- $t>0$, $\left|\frac{e^{it}}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$ Riemann, d'où $t \mapsto \frac{e^{it}}{t^2}$ intégrable sur $[x;+\infty[$

  par le th. de comparaison. OK

D'où $\varphi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,dt = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$

φ est continue et même C^∞ car $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ et $t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ le sont sur $[x, +\infty[$

$$\varphi'(x) = -\cos x \frac{\sin x}{x} - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

$$+ \sin x \frac{\cos x}{x} - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$$

$$= -\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$$

$$\varphi''(x) = -\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt + \frac{\sin^2 x}{x} - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$$

$$+ \frac{\cos^2 x}{x} = \frac{1}{x} - \varphi(x)$$

ψ, tout comme φ, est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'éq diff$\underset{\text{linéaire}}{\wedge}$ d'ordre 2

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

Les 2 fonctions diffèrent donc d'une solution de l'éq homogène associée et il existe $A \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $\forall x > 0$

$$\varphi(x) = A\cos(x - \theta) + \psi(x)$$

Or $\psi(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

car $\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ et $\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

De plus $A\cos(x-\theta)$ a une limite quand $x \to +\infty$ seulement si $A = 0$

Comme φ a une limite en $+\infty$, $A = 0$ et

$$\forall x > 0 \quad \varphi(x) = \psi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,dt$$

3) $\varphi(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}\,dt = \left[\operatorname{Arctan} x\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

φ est continue sur $\mathbb{R}$

$$\frac{\pi}{2} = \varphi(0) = \lim_0 \varphi = \lim_0 \psi$$

Reste à prouver que $\lim_0 \psi = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

D'après 2), $\forall x > 0$

$$\psi(x) = \underbrace{\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt}_{\xrightarrow[x \to 0]{} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt} - \underbrace{\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt}_{?}$$

Montrons que $\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

$x \in]0,1]$ $\left|\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt\right| \leq \sin x \left|\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt\right| + \sin x \left|\int_x^{1} \frac{\cos t}{t}\,dt\right|$

$$\leq \sin x \left|\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt\right| + \sin x \int_x^{1} \left|\frac{\cos t}{t}\right|\,dt$$

$$\leq A \sin x + \sin x \int_x^1 \frac{dt}{t} \qquad \text{avec} \qquad \underbrace{A = \left| \int_1^{\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt \right|}_{\text{fenne}}$$

$$\leq A \sin x + \sin x \, |\ln x|$$

$$\leq A \sin x + x\,|\ln x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$