Dev : Calcul de l'intégrale de Dirichlet

Etude de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$

1°/ L'intégrale n'est pas intégrable (pas d'absolue intégrabilité) → non absolument convergente

Rouvière p174

Montrons que $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$

Soit $X \in [3 ; +\infty[$

$$\int_{1+\frac{\pi}{2}}^{X+\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \underset{(y = x - \frac{\pi}{2})}{=} \int_1^X \frac{|\cos y|}{y + \frac{\pi}{2}}\,dy$$

d'où
$$2\int_{1+\frac{\pi}{2}}^{X+\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = \int_{1+\frac{\pi}{2}}^{X+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{t}\,dt + \int_{1+\frac{\pi}{2}}^{X+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$$

$$= \int_{1+\frac{\pi}{2}}^{X+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{t}\,dt + \int_1^X \frac{|\cos y|}{y+\frac{\pi}{2}}\,dy$$

$$\geq \int_{1+\frac{\pi}{2}}^{X} \frac{|\sin t| + |\cos t|}{t + \frac{\pi}{2}}\,dy$$

$$\geq \int_{1+\frac{\pi}{2}}^{X} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{t+\frac{\pi}{2}}\,dy = \int_{1+\frac{\pi}{2}}^{X} \frac{1}{t+\frac{\pi}{2}}\,dy$$

$$= \left[\ln\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right]_{1+\frac{\pi}{2}}^{X}$$

$$= \ln\left(X + \frac{\pi}{2}\right) - \ln(1+\pi)$$

donc $\int_1^X \frac{|\sin t|}{t}\,dt \xrightarrow[X \to +\infty]{} +\infty$

Donc $|f|$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ d'où f non plus.

2) Montrons qu'elle est convergente.

$$F(X) = \int_1^X f(t)\,dt \underset{IPP}{=} \left(\frac{-\cos x}{x}\right)_1^X - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

$$= -\frac{\cos X}{X} + \cos 1 - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

d'une part $-\frac{\cos X}{X} + \cos 1 \xrightarrow[X \to +\infty]{} \cos 1$

et $x \mapsto \frac{\cos x}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (th de domination et comparaison avec intégrale de Riemann $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$

D'où $\int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\, dx \xrightarrow[X \to +\infty]{} \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$

F admet une limite finie en $+\infty$

$$F(X) \xrightarrow[X \to +\infty]{} \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

3) Montrons que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$ Dantzer p 243

$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ donc pas de problème en 0

On considère $\forall n \in \mathbb{N}$ I_n et J_n définies par

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\, dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\, dt$$

a) vérifier que I_n et J_n sont convergentes

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \underset{0}{\sim} \frac{\sin(2n+1)t}{t} \underset{0}{\sim} 2n+1$$

Les 2 application sont prolongeables par continuité en 0, les intégrales sont donc convergentes

b) Montrons que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente

chgt de variable $x = (2n+1)t$

$dx = (2n+1)\, dt$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\, dt = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\frac{x}{(2n+1)}} \times \frac{1}{(2n+1)}\, dx$$

$$= \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente avec $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$

c) $f :]0;\frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ est prolongeable par continuité.

$$f(t) = \frac{\sin t - t}{t\sin t} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{t^3}{6}}{t^2} \sim -\frac{t}{6}$$

f admet pour limite 0 quand $t\to 0$. Elle est prolongeable par continuité en 0.

d) Lemme de Lebesgue p221 Dantzer

Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)e^{int}\,dt = 0$$

admis (pouvoir le faire)

On applique $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} f(t)\sin(nt)\,dt = 0$

$$I_n - J_n = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin(2n+1)t}{t} - \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right)dt = \int_0^{\pi/2} f(t)\sin(2n+1)t\,dt$$

donc $(I_n - J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, la suite (I_n) étant convergente

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$

e) Montrons que $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall t\in]0;\frac{\pi}{2}]\quad \sum\limits_{k=-n}^{n}\cos(2kt) = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$

$\forall n\in\mathbb{N}\ \forall t\in]0,\frac{\pi}{2}]\quad \sum\limits_{k=-n}^{n}\cos(2kt) = \mathrm{Re}\left(\sum\limits_{k=-n}^{n} e^{2ikt}\right)$

$\forall t\in]0,\frac{\pi}{2}],\ e^{2ikt}\neq 1$

donc

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{2ikt} = e^{-2int}\,\frac{e^{2(2n+1)it}-1}{e^{2it}-1} \quad (\text{géométrique})$$

$$= \frac{e^{-2int}\cdot e^{(2n+1)it}}{e^{it}}\;\frac{e^{(2n+1)it} - e^{-(2n+1)it}}{e^{it}-e^{-it}}$$

$$= \frac{e^{(2n+1)it} - e^{-(2n+1)it}}{e^{it} - e^{-it}} = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad J_n = \sum_{k=-n}^{n} \int_0^{\pi/2} \cos(2kt)\,dt$

$$J_n = \sum_{k=-n}^{-1} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos(2kt)\,dt}_{=0} + \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos(2kt)\,dt}_{=0} + \underbrace{\int_0^{\pi/2} dt}_{\pi/2}$$

d'où $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$