218
415

Inégalités de Kolmogorov.

X-ENS Analyse T1
ex 4.3.6 p 259
(adapté)
+ Gourdon pour Analyse

1°/ Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on suppose f et f'' bornées sur $\mathbb{R}$ et on pose $M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, $M_k = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$

a) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $h>0$

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{M_2}{2} h^2$$

$$\text{et } |f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| \leq M_2 h^2$$

b) En conclure que $M_1 \leq \sqrt{2M_0 M_1}$

on suppose que $\forall k \in [\![0,n]\!]$ $f^{(k)}$ bornée sur $\mathbb{R}$

2°/ En raisonnant par récurrence forte, montrer que $\forall k \in [\![0,n]\!]$

$$M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}$$

Indice. mq $M_k^2 \leq 2M_{k-1} M_{k+1}$, puis les relations

$$M_{k-1} \leq 2^{(k-1)/k} M_0^{1/k} M_k^{(k-1)/k}$$

$$M_{k+1} \leq 2^{(n-k)/2} M_k^{1-\frac{1}{n+1-k}} \times M_{n+1}^{1/(n+1-k)}$$

Solution

1°/ Soit $x \in \mathbb{R}$, $h>0$. On suppose $M_2 > 0$

Comme f est C^2 sur $\mathbb{R}$, on peut écrire la formule d'inégalité de Taylor-Lagrange

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{h^2 M_2}{2}$$

(Explication Taylor-Lagrange avec reste intégral

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \int_x^{x+h} (x+h-t) f^{(2)}(t)\, dt$$

donc $f(x+h) - f(x) - hf'(x) = \int_x^{x+h} f^{(2)}(t)(x+h-t)\,dt$

$$\begin{aligned}
|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| &\leq \int_x^{x+h} |f^{(2)}(t)(x+h-t)|\,dt \\
&\leq \int_x^{x+h} |f^{(2)}(t)|\,|x+h-t|\,dt \\
&\leq M_2 \int_x^{x+h} |x+h-t|\,dt \\
&\leq \frac{M_2 h^2}{2}
\end{aligned}$$

De même pour $(x-h)$, soit

$$|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leq \frac{M_2 h^2}{2}$$

Or $f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x) = (f(x+h) - f(x) - hf'(x)) - (f(x-h) - f(x) + hf'(x))$

On obtient par inégalité triangulaire.

$$|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| \leq M_2 h^2 \quad (1)$$

b) $2h|f'(x)| - |f(x+h) - f(x-h)| \leq |f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)|$

(inég. triangulaire)

donc $2h|f'(x)| \leq |f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| + |f(x+h) - f(x-h)|$

$$\underset{(1)}{\leq} h^2 M_2 + 2M_0$$

D'où $|f'(x)| \leq \frac{h^2 M_2}{2h} + \frac{M_0}{h}$

En passant au sup $\underline{M_1 \leq \frac{hM_2}{2} + \frac{M_0}{h}}$

Notons $\varphi(h) = \dfrac{hM_2}{2} + \dfrac{M_0}{h}$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall h>0$ $\varphi'(h) = \dfrac{M_2}{2} - \dfrac{M_0}{h^2}$

$$\varphi'(h) = 0 \iff h^2 = \frac{2M_0}{M_2}$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$$

Tableau de variations.

h	0	$\sqrt{2M_0/M_2}$	$+\infty$
φ	$\searrow$	$\sqrt{2M_0M_2}$	$\nearrow$

Donc on choisit le minimum de la fonction pour majorer.

alors $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$

- Attention si $M_2 = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$ $f^{(2)}(x) = 0$

donc f est une fonction affine.

mais f est bornée, donc f est une fonction constante

on a donc $M_1 = M_2 = 0$ d'où $0 \leq 0$

2°/

Remarque cet exercice adapté ne demande pas de montrer que les $f^{(k)}$ sont bornées. Cf remarque finale si l'on suppose que seulement M_0 et M_n le sont $\rightarrow$ exercice d'origine

Pour $n \geqslant 2$, on note le prédicat

« si $f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et si $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $f^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$

alors si l'on pose $\forall k \in [\![0,n]\!]$ $M_k = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$, on a

$\forall k \in [\![0,n]\!]$ $M_k \leq 2^{k(n-k)/2} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}$. »

Pour $n=2$, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tq f, f' et f'' bornées

on doit montrer $M_0 \leq M_0$ $(k=0)$

$M_1 \leq \sqrt{2 M_0 M_1}$ $(k=1)$

$M_2 \leq M_2$ $(k=2)$

La relation 2) est prouvée dans la question 1)

les 2 autres sont évidentes.

<u>hérédité</u> : Soit $n \geq 2$ fixé pour lequel $H_2, \dots, H_n$ sont vrais

vérifions que H_{n+1} est vrai :

Donc rappel, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^{n+1} tq $\forall k \in [\![0, n+1]\!]$

$f^{(k)}$ est bornée

d'une part, pour $k=0$ $M_0 \leq M_0$

$k=n+1$ $M_{n+1} \leq M_{n+1}$ } ok

Donc reste à montrer que $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $M_k \leq 2^{\frac{k(n+1-k)}{2}} M_0^{1-k/n+1} M_{n+1}^{k/n+1}$

* $k-1 \leq n-1$ donc $(n-1)-(k-1) \geq 2$

si f est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$, alors $f^{(k-1)}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

D'après H_2 pour $f^{(k-1)}$: $M_k^2 \leq 2 \underbrace{M_{k-1}}_{A} \underbrace{M_{k+1}}_{B}$

(A) * De plus f est de classe C^k sur $\mathbb{R}$, donc d'après H_k

$\forall j \in [\![0, k]\!]$ $M_j \leq 2^{\frac{j(k-j)}{2}} M_0^{1-\frac{j}{k}} M_k^{j/k}$

Si $j = k-1$ en particulier

$M_{k-1} \leq 2^{(k-1)/2} M_0^{1/k} M_k^{k-1/k}$

B La fonction $f^{(k)}$ est C^{n+1-k} sur $\mathbb{R}$, donc on peut utiliser H_{n+1-k}, on a

$$\forall j \in [\![0, n+1-k]\!] \quad M_{k+j} \le 2^{\frac{j(n+1-k-j)}{2}} \, M_k^{1-\frac{j}{n+1-k}} \, M_{n+1}^{\frac{j}{n+1-k}}$$

En particulier pour $j=1$

$$M_{k+1} \le 2^{\frac{n-k}{2}} \, M_k^{1-\frac{1}{n+1-k}} \, M_{n+1}^{\frac{1}{n+1-k}}$$

Comme les deux M_{k-1} et M_{k+1} sont positifs alors

$$M_k^2 \le 2 M_{k-1} M_{k+1} \le 2 \times 2^{\frac{k-1}{2}} M_0^{1/k} M_k^{(k-1)/k} \, 2^{(n-k)/2} \, M_k^{1-\frac{1}{n+1-k}} \, M_{n+1}^{1/(n+1-k)}$$

$$= 2^{\frac{n+1}{2}} \, M_0^{1/k} \, M_k^{\frac{k-1}{k}+\frac{n-k}{n+1-k}} \, M_{n+1}^{\frac{1}{n+1-k}}$$

on élève des 2 côtés par $\frac{k(n+1-k)}{n+1}$

$$M_k^{\frac{2k(n+1-k)}{n+1}} \le 2^{\frac{k(n+1-k)}{2}} \, M_0^{\frac{n+1-k}{n+1}} \, \underbrace{M_k^{\frac{(k-1)(n+1-k)}{n+1}+\frac{k(n-k)}{n+1}}}_{c} \, M_{n+1}^{k/(k+1)}$$

$$\frac{2k(n+1-k)}{n+1} - \left[\frac{(k-1)(n+1-k)}{n+1} + \frac{k(n-k)}{n+1}\right] = \frac{1}{n+1}\left[2kn + 2k - 2k^2 - kn - k + k^2 + n - 1 + k^2 - kn\right] = 1$$

d'où $M_k \le 2^{\frac{k(n+1-k)}{2}} \, M_0^{1-\frac{k}{n+1}} \, M_{n+1}^{\frac{k}{k+1}}$

D'où le résultat !

Rq (1) : pour diviser par c, il faut que $M_k > 0$

si on a $M_k = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$ $f^{(k)}(x) = 0$

donc f est polynômiale de degré au plus $k-1$

Comme f est bornée, elle est constante

on a alors $M_1 = M_2 = \dots = M_n = 0$

donc on a le cas d'égalité.

Rq ② Comment montrer que tous les M_k $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$ sont bornés si M_0 et M_n sont bornés ? (ex X-ENS)

Soit $x \in \mathbb{R}$, $h > 0$. Par inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$

$$\left| f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \dots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) \right| \leq \frac{h^n M_n}{n!}$$

D'où par inégalité triangulaire,

$$\left| hf'(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) \right| \leq 2M_0 + \frac{h^n M_n}{n!}$$

Si on écrit cette inégalité pour les $(n-1)$ valeurs distinctes de h avec $0 < h_1 < \dots < h_{n-1}$

soit $X = \begin{pmatrix} f'(x) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$, on a $\|AX\|_\infty \leq \underbrace{2M_0 + \frac{h_{n-1}^n M_n}{n!}}_{=K}$

avec $A = \begin{pmatrix} h_1 & \frac{h_1^2}{2} & \dots & \frac{h_1^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & & & \\ h_{n-1} & \frac{h_{n-1}^2}{2} & & \frac{h_{n-1}^{n-1}}{(n-1)!} \end{pmatrix}$

On sort chaque factorielle et on met en facteur les h_k, on obtient une matrice de Vandermonde.

$\rightarrow$ A est inversible

donc $\|X\|_\infty \leq |||A^{-1}||| \cdot K$

Cette égalité est vraie $\forall x \in \mathbb{R}$, donc M_k sont toutes finies.