Structure de groupes

Groupe : ensemble G et une loi de composition interne $*$

i) $*$ est associative

ii) $\exists e \in G \ \forall x \in G \quad e * x = x * e = x$ (elt neutre)

iii) $\forall x \in G \ \exists y \in G \quad x * y = y * x = e$ (y est l'inverse de x)

noté x^{-1}

Structure de sous-groupes

$(G, *)$ groupe. H est un sous-groupe de G.

i) stable par $*$

ii) si $(H, *)$ est un groupe

Démontrer que H est un sous-groupe de G.

- H est non vide ($e \in H$)
- H est stable par la loi $\forall x, y \in H \quad x * y \in H$
- H stable par l'inverse $\forall x \in H$, $x^{-1} \in H$.

L'intersection de deux sous-groupes est un sous-groupe.

Morphisme de groupes

G et H deux groupes. Une application $f : G \rightarrow H$ est un morphisme de groupe si :

$$\forall x, y \in G \quad f(x * y) = f(x) * f(y)$$

Prop : $\begin{cases} f(G) \text{ est un sous-groupe de } H \\ f^{-1}(H) \text{ est un sous-groupe de } G \\ f(e_G) = e_H \end{cases}$

Noyau du morphisme : $\mathrm{Ker}\, f = f^{-1}(e_H) := \{ x \in G \mid f(x) = e_H \}$

Image du morphisme : $\mathrm{Im}\, f = f(G) := \{ f(x),\ x \in G \}$

<u>Prop</u> : Un morphisme f est injectif ssi $\mathrm{Ker}\, f = \{e_G\}$

Un morphisme f est surjectif ssi $\mathrm{Im}\, f = H$

<u>Groupes particuliers.</u>

G un groupe. G est <u>monogène</u> s'il existe $a \in G$ tel que le sous-groupe engendré par A est égal à G.

$\exists\, a \in G,\ G := \{ a^n,\ n \in \mathbb{Z} \}$

G est dit <u>cyclique</u> s'il est monogène et fini

<u>Théorèmes</u>. i) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe cyclique

$\bar{k}$ est générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ssi $k \wedge n = 1$

ii) Tout groupe monogène infini est isomorphe à $\mathbb{Z}$

Tout groupe monogène fini est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

<u>Ordre d'un élément</u>

$a \in G$ est d'ordre fini s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tq $a^n = e$

$a \in G$ d'ordre n, alors $a^k = e$ ssi $n \mid k$

L'ordre d'un élément dans un groupe divise l'ordre du groupe.

METHODE

Démontrer que H est un sous-groupe de G

i) $e \in H$

ii) $\forall x, y \in H \quad xy^{-1} \in H$

Travailler dans les groupes finis

Dans les groupes finis, si x est élément du groupe $\{x^n, n \in \mathbb{N}\}$ est fi-

Morphisme de groupe et groupe monogène, engendré, cyclique

Si $f: G \to H$ avec G monogène engendré par a, alors f est entièrement déterminé par $f(a)$

Calculer l'ordre d'un élément dans un groupe

Pour montrer que l'ordre d'1 élément dans un groupe est d, on peut :

- commencer par vérifier que $x^d = e$
- prouver que si $x^r = e$ alors $d \mid r$.