123 Mercier

Groupe du triangle.

Quel est l'ensemble des isométries qui laissent invariant un triangle ?

Théorème préliminaire : Mercier p278

Toute isométrie laissant une partie finie $P = \{A_0, \ldots, A_{n-1}\}$ globalement invariante, laisse fixe l'isobarycentre O des points $A_0, \ldots, A_{n-1}$

(cf voir, isométries laissant fixe une partie)

preuve : toute application f de $Is(P)$ est affine donc transforme l'isobarycentre O de P en l'isobarycentre de $f(P) = P$ qui n'est autre que P. Donc $f(O) = O$.

→ Lorsque P est fini, les seules isométries qui laissent des ensembles invariants, sont celles qui fixent l'isobarycentre O de P. Si E est un plan, on recherche les isométries de $Is(P)$ parmi les rotations de centre O et les réflexions par rapport à des droites qui contiennent O.

Groupe du triangle

A] triangle non isocèle. $T = ABC$, $f \in Is(T)$

f laisse fixe l'isob. de T. Donc l'image du segment [AB] par f sera nécessairement un côté de longueur AB dans le triangle ABC. Avec les hypothèses $f([AB]) = [AB]$

2 cas possibles 1) $(f(A), f(B)) = (A, B)$

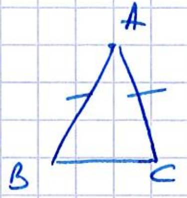
iso. laisse 3 pts fixes O, A et B non alignés donc $f = Id$

2) $(f(A), f(B)) = (B, A)$ alors $f(C) = C$ et la

conservation des distances par f implique que $AC = BC$ → absurde $f = Id$.

$Is(T) = \{Id\}$

B] Isocèle non équilatéral.



Si $f \in Is(T)$ alors $f([BC]) = [BC]$ car f isométrie (seule longueur id)

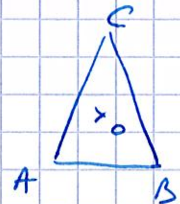
* si $(f(B), f(C)) = (B, C)$, f laisse 3 points fixes non alignés O (isob.), B et C donc $f = Id$.

* si $(f(B), f(C)) = (C, B)$ alors $f(A) = A$. Les points A et O sont invariants. Comme (OA) médiatrice de $[BC]$, l'appli f coïncide avec la réflexion s_A par rapport à (OA) en chacun des points O, A, B et C. $\Rightarrow f = s_A$

La réciproque est triviale, $Is(T) = \{Id, s_A\}$, $T \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et au groupe des iso laissant une paire de points invariante.

C] Equilatéral.

$T = ABC$, orienté direct 3 paires $(\vec{AB}, \vec{AC})$ $(\vec{BC}, \vec{BA})$ $(\vec{CA}, \vec{CB})$



sont directes et mesure principale des angles est dans $]-\pi, \pi[\to]0, \pi[$

Th de l'angle inscrit $(\vec{OA}, \vec{OB}) = 2(\vec{CA}, \vec{CB}) = \frac{2\pi}{3} (2\pi)$

on en déduit $(\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OB}, \vec{OC}) = (\vec{OC}, \vec{OA}) = \frac{2\pi}{3} (2\pi)$

1) Tout déplacement $r \in Is^+(T)$ est 1 rotation de centre O

- si $r(A) = A$, $r = Id$.
- si $r(A) = B$, $r_{2\pi/3}$
- si $r(A) = C$, $r_{4\pi/3}$

récip. toutes rot. de gauche conservent le triangle.

$Is^+(T) = \{Id, r_{2\pi/3}, r_{4\pi/3}\}$

②

Tout antidéplacement s de $Is^-(T)$ est 1 réflexion d'axe passant par O.

- si $s(A) = A$, s réflexion s_A = médiatrice $[BC]$
- si $s(A) = C$, s_B médiatrice $[AC]$
- si $s(A) = B$, s_C médiatrice $[AB]$

réciproque trivial.

$$Is^-(T) = \{s_A, s_B, s_C\} \qquad Is(T) = Is^+(T) \cup Is^-(T)$$

On remarque que $\phi : Is(T) \to S_3$ est 1 isomorphisme.

$$\phi : Is(T) \to S_3$$

$$f \mapsto \begin{pmatrix} A & B & C \\ f(A) & f(B) & f(C) \end{pmatrix} \qquad \text{injectif.}$$

$Is(T) \simeq \phi(Is(T)) \subset S_3$ et $|Is(T)| \leq |S_3| = 3! = 6$

et cela trouve son intérêt dans $Is(T)$

Les autres isométries des polygones sont explicités après dans le dessin.

$\underline{Q}$: Pourquoi l'image d'un sommet est 1 sommet ?

A, B, C non alignés !

Si $f(A) = A$, $f(B) = B$ et $f(C) = C$, c'est l'identité.

Par l'absurde, on suppose qu'il existe M tel que $f(M) \neq M$

$$AM = A f(M) \qquad A \in [M f(M)]$$

$$BM = B f(M) \qquad B \in [M f(M)]$$

$$CM = C f(M) \qquad C \in [M f(M)]$$

$\Rightarrow$ A, B, C sont alignés, absurde

Supposons que $f(A)$ ne soit pas un sommet

les sommets sont les points extremums, donc $f(A)$

est 1 combinaison linéaire (barycentre) de deux points distincts du triangle, soit M et N ces 2 points

$f^{-1}(f(A)) = A$

$f^{-1}(M)$ et $f^{-1}(N) \in$ triangle

or ils ont le même barycentre que $f^{-1}(M)$ et $f^{-1}(N)$

$\rightarrow$ pas possible car A est un sommet.

(l'image du barycentre est le barycentre)