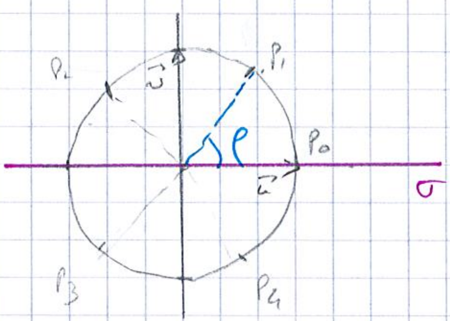
Groupe Diédral.

Soit $\mathcal{E}$ plan affine euclidien orienté muni d'un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, direct.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $\begin{cases} \rho \text{ la rotation de centre } O \text{ et d'angle } \frac{2\pi}{n} \\ \sigma \text{ symétrie orthogonale par rapport à l'axe } (O, \vec{u}) \end{cases}$

On pose $P_0 = O + \vec{u}$ et $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$ $P_k = \rho^k(P_0)$

Dn groupe diedral, groupe des isométries du plan qui envoient le polygône régulier à n côtés $\{P_0, \dots, P_{n-1}\}$ sur lui-même.



Questions : 1) Les isométries directes forment dans Dn un sous-groupe cyclique, engendré par ρ. Ordre du sous-groupe ?

2) Démontrer que tout élt de Dn est de la forme ρ^k ou $\rho^k \circ \sigma$ pour un $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Ordre de Dn ?

3) Caractérisation géométrique des éléments de Dn.

Solution : 1) D_n^+ s/s groupe des isométries directes dans Dn.

Rq $\rho^n = Id$

$\forall k \in [\![1, n-1]\!]$ $\rho^k(P_0) = P_k$

et $\rho(P_{n-1}) = P_0$

donc $\rho \in D_n^+$

d'où $\langle \rho \rangle \subset D_n^+$

Soit $\alpha \in D_n^+$, montrons qu'il s'écrit sous la forme ρ^k

α est une isométrie positive donc conserve l'isobarycentre, donc

ici conserve O

O est un point fixe, donc rotation de centre O

et $\alpha(P_0) \in \underbrace{\{P_0, \dots P_{n-1}\}}_{\text{cardinal} = n}$

Par égalité des dimensions $D_n^+ = \{\rho^l, l \in [\![0, n-1]\!]\}$

et $\mathrm{card}(D_n^+) = n$

2) On a $\sigma(P_0) = P_0$ et $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$ $\sigma(P_i) = P_{n-i}$

donc $\sigma \in D_n$.

et $\rho^l \circ \sigma \in D_n$ $\forall l \in [\![0, n-1]\!]$

Soit $\alpha \in D_n$ - 2 possibilités.

1) α directe $\Rightarrow \alpha \in D_n^+$ et est donc de la forme ρ^l

2) α indirecte $\Rightarrow \sigma \circ \alpha \in D_n^+$ donc de la forme ρ^k

$\exists k$ tq $\sigma \circ \alpha = \rho^l$

$\sigma^{-1} \circ \sigma \circ \alpha = \sigma^{-1} \circ \rho^k$

$\alpha = \sigma^{-1} \circ \rho^l = \sigma \circ \rho^l$ car $\sigma^{-1} = \sigma$

Ces éléments sont 2 à 2 distincts $\Rightarrow \# D_n = 2n$.

(aussi par injectivité, $\sigma \circ \rho^k = \sigma \circ \rho^l \underset{\sigma \text{ bij}}{\Leftrightarrow} \rho^k = \rho^l \Leftrightarrow k = l$)

3) L'isométrie ρ^l est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2k\pi}{n}$

Soit α une rotation quelconque de centre O

$\alpha \circ \sigma$ est donc une isométrie indirecte possédant 1 point fixe O.

$\rightarrow$ symétrie !

$(\alpha \circ \sigma)^{-1} \underset{\text{groupe}}{=} \sigma^{-1} \circ \alpha^{-1} \underset{\text{sym } \sigma^{-1} = \sigma}{=} \sigma \circ \alpha^{-1} \underset{\text{def sym pour } \alpha \circ \sigma}{\hat{=}} \alpha \circ \sigma$

Fixons α = rotation centre O et d'angle $\frac{\pi}{n}$

$$\rho^k \circ \sigma = \alpha^{2k} \circ s$$
$$= \alpha^{2k-1} \circ \alpha \circ s$$
$$= \alpha^{2k-1} \circ s \circ \alpha^{-1}$$
$$\underset{\text{rec immédiate}}{=} \alpha^k \circ s \circ \alpha^{-k} \quad ①$$

et $\rho^k \circ \sigma(\alpha^k(P_0)) = \alpha^k \circ s \circ \alpha^{-k}(\alpha^k(P_0))$
$$= \alpha^k(P_0)$$

<u>ccl</u> par ① c'est une symétrie car ρ^k est une rotation

par ② $(O\alpha^k(P_0))$ est stable

$\rightarrow$ symétrie orthogonale d'axe $(O\alpha^k(P_0))$

Séparons tous les cas :

- Si <u>n est impair</u>

  * si $k = 2l$ (pair)

  par ① $\forall k \ \rho^k \circ s = \rho^{2l} \circ s$
  $$= \alpha^l \circ s \circ \alpha^{-l}$$
  $\rightarrow$ symétrie $\perp$ d'axe (OP_l)

  * si k impair, alors $k+n$ pair $k+n = 2l$
  $$\rho^k \circ s = \rho^{2l-n} \circ s$$
  $$= \rho^{2l} \circ s \quad \text{car } \rho^{-n} = Id.$$
  $$= \alpha^l \circ s \circ \alpha^{-l} \rightarrow \underline{\underline{\text{idem}}}$$

- si <u>n pair</u>, $n = 2m$

  * si $k = 2l$ (pair)
  $$\rho^k \circ s = \rho^{2l} \circ s = \alpha^l \circ s \circ \alpha^{-l}$$
  $\rightarrow$ symétrie $\perp$ (OP_l)

+ si : k est impair

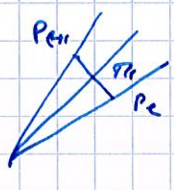
soit Π_ℓ le milieu de $[P_\ell, P_{\ell+1}]$

$$\rho^k \circ s = \rho^{2\ell+1} \circ s = \rho \circ \rho^{2\ell} \circ s$$
$$= \rho \circ \underbrace{\omega^\ell \circ s \circ \omega^{-\ell}}_{s((OP_\ell))}$$

composée d'une rotation et d'une symétrie

→ symétrie

$$s_{(OP_\ell)}(\Pi_\ell) = \begin{cases} \Pi_{\ell-1} & \text{si } \ell \geq 1 \\ \Pi_{n-1} & \text{si } \ell = 0 \end{cases}$$ (dessin)



d'où $\rho \circ s_{(OP_\ell)}(\Pi_\ell) = \rho(\Pi_{\ell-1}) = \begin{cases} \Pi_\ell & \text{si } \ell \geq 1 \\ \Pi_0 & \text{si } \ell = 0 \end{cases}$

d'où symétrie d'axe $(O\Pi_\ell)$