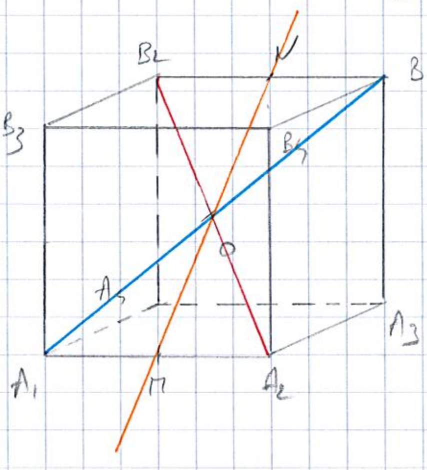
Groupe des isométries du cube

Théorème : Soit $Is(C)$ le groupe des isométries affines de l'espace laissant invariant le cube. Alors $Is(C) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Preuve : Soit C un cube formé des sommets $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$, de centre O. associé à un repère affine (O, A_1, A_2, A_3).



On considère d'abord les isométries positives $Is^+(C)$ (de déterminant 1)

Notons $D = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ l'ensemble des grandes diagonales du cube. Et elles passent par O, le centre du cube.

$\forall i \in [\![1, 4]\!] \quad D_i = [A_i B_i]$

Idée : montrons que D est stable par les isométries positives.

Comme $Is^+(C)$ conserve les distances et que les grandes diagonales sont les longueurs les plus grandes dans le cube
$\Rightarrow$ $Is^+(C)$ ne peut envoyer une grande diagonale que sur une autre grande diagonale.

Soit $f \in Is^+(C)$ alors $f(D) \subset D$

D stable par les isométries.

Introduisons l'action de groupe

$$Is^+(C) \times D \longrightarrow D \qquad \text{car } Is^+(C) \text{ est un groupe (cf cours)}$$
$$(f, D_i) \mapsto f(D_i)$$

L'action de groupe précédente induit un morphisme de groupe

$$\varphi : Is^+(C) \longrightarrow S(D)$$
$$f \longmapsto \varphi_f : D \longrightarrow D$$
$$D_i \mapsto f(D_i)$$

Rq $\varphi_f(D_i) = f(D_i)$ par raccourci de notation.

Idée, montrer que φ est bijective, dans ce cas $Is^+(C)$ et $S(D)$ seront isomorphes

1) φ est surjective ?

$S(D)$ est engendré par les transpositions (groupes symétriques)

Il faut vérifier que toute transposition de $S(D)$ possède un antécédent dans $Is^+(C)$ par φ.

Raisonnons via la transposition $(D_1, D_2) \in S(D)$ (gal immédiate)

L'échange de D_1 et D_2 se fait par le retournement d'axe (RN)

avec R milieu de $[A_1 A_2]$ et N milieu de $[B_1 B_2]$

c'est aussi une rotation d'angle π autour de l'axe (RN)

→ isométrie positive.

donc φ est surjective.

2) φ est injective ?

Par l'absurde, on suppose qu'il existe $f \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ tq $f \neq Id_{\mathbb{R}^3}$

on a $\varphi_f = Id_{S(D)}$ donc $\forall i \in [\![1,4]\!]$ $f(D_i) = D_i$

on suppose que $f(A_1) = B_1$ car f n'est pas l'identité et f inverse au moins une diagonale.

de plus $f(A_2) = \{A_2, B_2\}$

Si $f(A_2) = A_2$ alors $d(f(A_1), f(A_2)) = d(B_1, A_2) \neq d(A_1, A_2)$

car f est une isométrie donc impossible.

d'où $f(A_2) = B_2$

Même procédé $f(A_3) = B_3$ et $f(A_4) = B_4$

Introduisons la symétrie de centre O s_O.

$s_O \circ f(A_i) = A_i \quad \forall i \in [\![1,4]\!]$

f isométrie affine, elle conserve les barycentres donc $f(O) = O$

et $s_O \circ f(O) = O$

D'où $s_O \circ f$ admet 5 points invariants (4 sont suffisants pour définir un repère affine), non coplanaires.

d'où $s_O \circ f = Id_{\mathbb{R}^3}$

$\det Id_{\mathbb{R}^3} = 1$ et $\det s_O = -1 \Rightarrow \det f = -1$, contradiction

car $f \in Is^+(C)$

donc $f = Id_{\mathbb{R}^3}$

φ est bijective donc $Is^+(C) \simeq S(D) \simeq S_4$

II Montrons que $Is(C) \simeq Is^+(C) \times \{Id, s_O\}$

Soit $\psi : Is(C) \longrightarrow Is^+(C) \times \{Id, s_O\}$

$$f \longmapsto \begin{cases} (f, Id) & \text{si } f \in Is^+(C) \\ (f \circ s_O, s_O) & \text{si } f \in Is^-(C) \end{cases}$$

a) mq ψ est morphisme.

$\forall (f, g) \in Is(C)$

i) $\psi(f \circ g) = (f \circ g, Id)$ si $f \circ g \in Is^+(C)$

Or $f \circ g \in Is^+(C)$, deux cas :

- si $f \in Is^+(c)$ et $g \in Is^+(c)$ alors

$$\Psi(f) \circ \Psi(g) = (f, Id) \circ (g, Id) = (f \circ g, Id \circ Id) = (f \circ g, Id)$$
$$= \Psi(f \circ g)$$

- si $f \in Is^-(c)$ et $g \in Is^-(c)$ alors

$$\Psi(f) \circ \Psi(g) = (f \circ s_0, s_0) \circ (g \circ s_0, s_0)$$
$$= (f \circ s_0 \circ g \circ s_0, s_0 \circ s_0)$$
$$= (f \circ g, Id)$$

Or cette symétrie commute avec toute application de $Is(c)$

car $f \circ s_0 \circ f^{-1} = s_{f(0)} = s_0$ par conjugaison.

(car $(f \circ s_0 \circ f^{-1}) \circ (f \circ s_0 \circ f^{-1}) = f \circ s_0^2 \circ f^{-1} = f \circ Id \circ f^{-1}$
$= Id$.

d'où $f \circ s_0 \circ f^{-1}$ est une symétrie et

$f \circ s_0 \circ f^{-1}(f(0)) = f(0) \rightarrow$ symétrie de centre $f(0)$

d'où $\Psi(f) \circ \Psi(g) = (f \circ g, Id) = \Psi(f \circ g)$

ii) $\forall (f, g) \in Is(c)$

$\Psi(f \circ g) = (f \circ g \circ s_0, s_0)$ si $f \circ g \in Is^{-1}(c)$

- 1er cas $f \circ g \in Is^{-1}(c) \Rightarrow f \in Is^+(c)$ et $g \in Is^{-1}(c)$

d'où $\Psi(f) \circ \Psi(g) = (f, Id) \circ (g \circ s_0, s_0)$
$= (f \circ g \circ s_0, Id \circ s_0)$
$= (f \circ g \circ s_0, s_0)$
$= \Psi(f \circ g)$

Morphisme ok.

b) Mq Ψ est injectif.

$\text{Ker}\, \Psi = \{ f \in Is(c) \text{ tq } \Psi(f) = \{Id, Id\} \}$

donc $f \in Is^+(C)$ et $f = Id$ d'où φ est injectif.

. Soit (f, Id) ou $(g \circ s_0) \in Is^+(C) \times \{Id, s_0\}$

alors on prend soit f soit $f = g \circ s_0$ alors $f \in Is^-(C)$

et son image est bien (g, s_0), d'où φ surjectif

donc φ est bijectif et $Is(C) \simeq Is^+(C) \times \{Id, s_0\}$

D'où $Is(C) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$.

III $Is(C)$ contient 48 éléments . Kieffer / Tauvel

- Id
- quarts de tour d'axe joignant les centres des faces opposées $\to$ 6
- demi-tours (retournements) d'axe joignant les centres des faces opposées $\to$ 3
- rotat° d'ordre 3 d'axes les grandes diagonales, il y a 2×4
- demi-tours (retournements) d'axe joignant les milieux de 2 arêtes symétriques par rapport à O. $\to$ 6

⊕ compo. avec $s_0 \Rightarrow 48$.

Action de groupe

G groupe, X ensemble non vide

Déf G agit sur X si on a défini l'application

$$G \times X \longrightarrow X$$
$$(g, x) \longmapsto g \cdot x$$

et que $\forall (g, g') \in G^2$ et $x \in X$

$$g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x \qquad e_G \cdot x = x$$

Déf équivalente :

Une action de groupe G sur X est un morphisme ϕ de G dans S_X.

et donc $\phi(g)(x) = g \cdot x$

Déf 1) Une action est fidèle si $\forall g \in G$

$$(\forall x \in X, (g \cdot x = x)) \Rightarrow (g = e_G)$$

ie noyau de ϕ réduit à e_G

2) Une action est transitive si

$\forall (x, y) \in G^2$, $\exists g \in G$ tq $y = g \cdot x$

Déf orbite de x dans X l'ensemble des $g \cdot x$ où g parcourt G (O_x)

(action transitive, s'il n'y a qu'un seul orbite)

même orbite $\Leftrightarrow$ relation d'équivalence

et les orbites partitionnent X.

stabilisateur : $G_x = \{ g \in G \mid g \cdot x = x \}$

Th $O_x \simeq G/G_x$

Si X est fini, $\quad \operatorname{Card} X = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Card}(G/G_{x_i})$

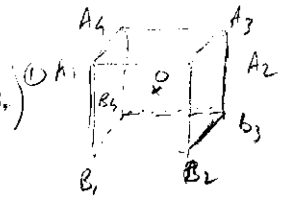
① Pourquoi ?

Développement : Groupe des isométries du cube

Réf : Karmati - Kieffer

> **Théorème** : Soit Is(C) le groupe des isométries affines de l'espace laissant invariant le cube alors
> $$Is(C) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

On considère un cube formé des sommets $A_1A_2A_3A_4B_3B_4B_1B_2$ de centre O.



Soit $g \in Is(C)$ alors g est une application affine, elle conserve les barycentres.
Comme O est l'isobarycentre des sommets alors $g(O) = O$

On appelle $Is^+(C)$ le sous-groupe de $Is(C)$ de déterminant positif.

1. Montrons que $Is^+(C) \simeq S_4$

Notons $D = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ l'ensemble des grandes diagonales passant par O.

Comme $Is^+(C)$ conserve les distances, elle ne peut envoyer une diagonale que sur une diagonale.
D est stable par les isométries.

Ainsi $Is^+(C)$ agit sur D par l'action : $Is^+(C) \times D \to D, (f, D_i) \to f(D_i)$, on peut aussi dire qu'il y a un morphisme ϕ: $Is^+(C) \to S(D), f \to \phi_f$ telle que $\phi_f(D_i) = f(D_i)$

On montre que ϕ est bijective

- <u>Montrons que ϕ est surjective</u>
  $S(D)$ est engendré par les transpositions, il suffit de vérifier que toutes les transpositions de S(D) possède un antécédent dans $Is^+(C)$ par ϕ.

On peut raisonner sur la transposition $(D_1, D_2) \in S(D)$ et généraliser aux autres transpositions.

Cette transposition est l'image par ϕ du retournement d'axe (MN) soit la rotation d'angle π autour de l'axe (MN) où M et N sont les milieux des segments $[A_1A_2]$ et $[B_1B_2]$ et cette isométrie est positive.

Ainsi ϕ est surjective

- <u>Montrons que ϕ est injective</u>

On suppose qu'il existe $f \in Ker(\phi)$ tel que $f \neq Id$

On a alors $\phi_f = Id_{S(D)}$, donc pour tout i, $f(D_i) = D_i$

Comme f n'est pas l'identité alors f inverse au moins une diagonale, on suppose que $f(A_1) = B_1$

De plus $f(A_2) = \{A_2, B_2\}$

- Si $f(A_2) = A_2$ alors $d(f(A_1), f(A_2)) = d(B_1, A_2) \neq d(A_1, A_2)$ or f est une isométrie donc impossible, on en déduit que $f(A_2) = B_2$, de même $f(A_3) = B_3$ et $f(A_4) = B_4$

Soit s_O la symétrie de centre O, alors $s_O \circ f(A_i) = A_i$ pour tout $i \in [1, 4]$

Comme f est une isométrie affine, elle conserve les barycentres donc $f(O) = O$
et $s_O \circ f(O) = O$

Ce la veut dire que $s_O \circ f$ admet 5 points invariants qui ne sont pas coplanaires, alors $s_O \circ f = Id$

Or $det(s) = -1$ donc $det(f) = -1$, ce qui contredit sa "positivité", donc $Ker(\phi) = Id$ et ϕ est injective.

On en conclut que ϕ est bijective donc $Is^{+}(C) \simeq S(D) \simeq S_4$

2. **Montrons que** $Is(C) \simeq Is^{+}(C) \times \{Id, s_0\}$

Soit $\psi: Is(C) \to Is^{+}(C) \times \{Id, s_0\}$, $f \to (f; Id)$ si $f \in Is^{+}(C)$ ou $f \to (f \circ s_0, s_0)$ si $f \in Is^{-}(C)$

a) **Montrons que ψ est un morphisme :**

$\forall (f, g) \in Is(C)$ $\psi(f \circ g) = (f \circ g, Id)$ si $f \circ g \in Is^{+}(C)$

- or $f \circ g \in Is^{+}(C)$
  - si $f \in Is^{+}(C)$ et $g \in Is^{+}(C)$ alors
    $\psi(f) \circ \psi(g) = (f, Id) \circ (g, Id) = (f \circ g, Id \circ Id) = (f \circ g, Id) = \psi(f \circ g)$
  - si $f \in Is^{-}(C)$ et $g \in Is^{-}(C)$ alors
    $\psi(f) \circ \psi(g) = (f \circ s_0, s_0) \circ (g \circ s_0, s_0) = (f \circ s_0 \circ g \circ s_0, s_0 \circ s_0) = (f \circ g, s_0)$

Or cette symétrie commute avec toute application de $Is(C)$ car $f \circ s_0 \circ f^{-1} = s_{f(O)} = s_O$

<u>Dém</u> : $\left(f \circ s_0 \circ f^{-1}\right) \circ \left(f \circ s_0 \circ f^{-1}\right) = Id$ donc c'est une symétrie de plus

$f \circ s_0 \circ f^{-1}(f(O)) = f(O)$

donc c'est une symétrie de centre $f(O)$.

on obtient que : $\psi(f) \circ \psi(g) = (f \circ g, Id) = \psi(f \circ g)$

$\forall (f, g) \in Is(C)$ $\psi(f \circ g) = (f \circ g \circ s_0, s_0)$ si $f \circ g \in Is^{-}(C)$

- or $f \circ g \in Is^{-}(C)$
  - si $f \in Is^{+}(C)$ et $g \in Is^{-}(C)$ (ou l'inverse) alors
    $\psi(f) \circ \psi(g) = (f, Id) \circ (g \circ s_0, s_0) = (f \circ g \circ s_0, Id \circ s_0) = (f \circ g \circ s_0, s_0) = \psi(f \circ g)$

b) Montrons que ψ est bijectif :

- $Ker\ \psi = \{f \in Is(C)\ tq\ \psi(f) = (Id, Id)\}$ donc $f \in Is^{+}(C)$ et $f = Id$ ainsi ψ est injectif
- Soit (f, Id) ou $(g, s_0) \in Is^{+}(C) \times \{Id, s_0\}$ alors on prend soit f ou $f = g \circ s_0$ alors $f \in Is^{-}(C)$ et son image est bien (g, s_0), on en déduit que ψ est surjectif.

Conclusion : ψ est bijectif et donc $Is(C) \simeq Is^{+}(C) \times \{Id, s_0\}$

Comme $Is^{+}(C) \simeq S_4$ **et** $\{Id, s_0\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$**, alors** $Is(C) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$