$GL_n(\mathbb{R})$ dense dans $M_n(\mathbb{K})$

$A \in M_n(\mathbb{K}) \setminus GL_n(\mathbb{K})$

Soit $(A - \frac{1}{k} I_n)_{k \in \mathbb{N}^*}$ suite cv vers A.

Dim finie, on peut n'importe quelle norme.

Comme $\frac{1}{k}$ n'est pas valeur propre de $A - \frac{1}{k} I_n$ pour que $A \in M_n(\mathbb{K}) \setminus GL_n$

A a un nb fini de vp.

Si λ_{i_0}, la plus petite en valeur absolue.

alors $\exists N \ \forall k > N \ \frac{1}{k} \in]-|\lambda_{i_0}|, |\lambda_{i_0}|[$ et donc $\frac{1}{k}$ n'est pas vp de A.

donc $A - \frac{1}{k} I_n \in GL_n(\mathbb{K}) \ \forall k \geq \frac{1}{|\lambda_{i_0}|}$

Compacité de $O_n(\mathbb{R})$ (fermé / borné en dim finie)

On est fermé. par la continuité des fonct: $A \mapsto {}^tA$

$M, N \mapsto MN$

on a $f : M \mapsto {}^tMM$ est continue car fct polynomiale en les coef de M

On est fermé car image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par f

On borné : N.A norme de Schur par ex $M_n(\mathbb{R}) \to (A,B) \mapsto tr({}^tBA)$

$O \in O_n(\mathbb{R}) \quad \|O\| = \sqrt{tr({}^tOO)} = \sqrt{tr I_n} = \sqrt{n}$ donc $O_n(\mathbb{R})$ borné.