Complément : Première formule de la moyenne.

* Soit f et g continues sur $[a,b]$, g positive sur $[a,b]$ et non identiquement nulle. Mq $\exists\, d \in [a,b]$ tq $\int fg = f(d) \int g$

Preuve f continue $\Rightarrow$ bornée, $\exists\, m$ et M

de $mg \leq fg \leq Mg$

d'où $m \int g \leq \int fg \leq M \int g$

d'après le th précédent $g > 0 \Rightarrow \int g > 0$ d'où

$$m \leq \frac{\int fg}{\int g} \leq M \Rightarrow \exists\, d \in [a,b] \text{ tq } f(d) = \frac{\int fg}{\int g}.$$

* Soit $f \in C^0([a,b])$ de valeur moyenne μ.

Mq $\exists\, c \in [a,b]$ tq $f(c) = \mu$

Preuve f continue, l'image d'un segment est un segment $[\min f, \max f]$ qui contient la valeur moyenne.

* Avec $\forall x \in]a,b[$ $g(x) > 0$, mq $c \in]a,b[$

Preuve f C^0 sur $[a,b]$, on sait qu'il existe $c \in [a,b]$ tq $f(c) = \mu$

d'où $\int f = (b-a) f(c)$. si $c \in]a,b[$ $\rightarrow$ rien à montrer.

sinon, supposons $c = a$.

– soit il existe $c' \in]a,b[$ tel que $f(c') = f(a)$, alors le résultat est démontré.

– soit $\forall x \in]a,b[$ $f(x) \neq f(a)$

donc $f(x) - f(a)$ est continue et ne s'annule pas sur l'intervalle $]a,b[$ $\Rightarrow$ signe constant.

Non id. nulle, donc $\int$ non nulle.

ce qui contredit $\int f = (b-a) f(a)$

donc $\exists\, x \in]a,b[$ $f(x) = f(a)$

* on reprend l'ex1, on suppose que $\forall x \in]a,b[\; g(x) > 0$. Rq
le réel d peut être choisi dans l'intervalle $]a,b[$.

<u>Preuve</u> : on reprend la précédente en notant que si $x \in]a,b[$ alors $f(x) \neq f(a)$
ssi $f(x)\, g(x) \neq f(a)\, g(x)$.