Exercice / dev  CN/CU sur $[-M,M]$ intégrabl. / série de Fourier (414)

Formule sommation de Poisson.

$f$ de classe $C^1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\quad f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour $|x| \to +\infty$

On pose $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$

1) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}$

avec $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\quad \hat{f}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi n t} \, dt$

Q : a) Existence de $F$

b) $F$ de classe $C^1$

c) $F$ est 1 périodique

d) Formule

---

Appl. montrer que $\forall s > 0$ $\quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/s}$

( utilisation du résultat

$\forall x \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-2i\pi t x} \, dt = \sqrt{\pi} \, e^{-\pi^2 x^2}$

(transf. de Fourier d'une Gaussienne)

1) a) Existence de F | Gourdon p Analyse. ①

→ montrer que la somme existe

donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Il faut montrer que $\sum_{n\geq 0} f(x+n)$ converge et $\sum_{n\geq 0} f(x-n)$

(comme f est bornée en $\pm\infty$, on va essayer de travailler sur un compact pour obtenir une cvg normale si possible)

Par hypothèse, $|x^2 f(x)| \underset{\pm\infty}{=} O(1)$ donc borné.

$\exists M>0$ tq $|x^2 f(x)| \leq M$ pour $|x|\geq 1$

Prenons $K>0$

a) on s'intéresse d'abord à la somme $\sum_{n\geq 0} f(x+n)$

$\forall x \in [-K,K]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ tq $|n| > K+1$

on a $|f(x+n)| \leq \frac{M}{(x+n)^2}$

or pour tout $|x|\leq K$, par la 2nd inégalité triangulaire

$$|x+n| \geq \big| |n| - |x| \big| \geq |n| - K$$

d'où $|f(x+n)| \leq \frac{M}{(|n|-K)^2} \xrightarrow[|n|\to\infty]{} 0$

et on a l'équivalent $\frac{M}{(|n|-K)^2} \sim \frac{M}{n^2}$ tg d'1 série de Riemann de cvg

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} f(x+n)$ converge normalement sur $[-K,K]$

donc converge simplement sur $[-K,K]$, valable sur $K>0$

donc cvg simplement sur $\mathbb{R}$.

b) Raisonnement identique pour $\sum_{n\leq 0} f(x-n)$.

ccl $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

→ F est bien définie.

2) Rq F est de classe $C^1$ utilisation du th de dérivation des séries de fonctions

- on a déjà la convergence simple sur $\mathbb{R}$.
- il faut la CU de la série des dérivées

$f$ est de classe $C^1$ et $f_n : x \mapsto f(x+n)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Soit $K>0$, $x \in [-K,K]$, même technique que dans 1)

$$|f'(x+n)| \text{ bornée (avec } \sup_{n\geq 0} f'(x+n) \text{, } \sup_{n \geq 0} f'(x-n))$$

Donc convergence normale et uniforme de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(x+n)$ sur $[-K,K]$

d'où F est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$
sur tout compact $[-K,K]$

3) <u>Périodicité</u> (passage à la limite)

on fixe $x \in \mathbb{R}$, alors $\forall N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=-N}^{N} f(x+1+n) = \sum_{n=-N+1}^{N+1} f(x+n)$$

or $\sum_{n\geq 0} f(x+n)$ et $\sum_{n\geq 0} f(x-n)$ cvg d'après 1. sur $\mathbb{R}$.

Passage à la limite $N \to +\infty$

$$F(x+1) = F(x) \text{ donc } F \text{ est 1 périodique}$$

4) F est 1 périodique, <u>$C^1$ sur $\mathbb{R}$</u>, et aussi continu sur $\mathbb{R}$
$\to$ théorème de Dirichlet. alors CN et CU vers $f$ sur $\mathbb{R}$

Suite des sommes partielles $(S_n(F))_{n\in\mathbb{N}}$ CU donc CS vers F

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(F) e^{2i\pi n x}$$

Reste à calculer les coeff de Fourier

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(F) = \int_0^1 F(t) e^{-2i\pi n t}\, dt.$$

car c'est une fonction périodique.

$$c_n(F) = \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t+k)\, e^{-2i\pi n t}\, dt$$

on pas de pb, c'est intégrable car $f$ est intégrable.

⊗ $\quad |f(t)\, e^{-2i\pi n t}| \leq |f(t)|$ et $\mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Riemann

→ $f_k$ continue sur $\mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

→ $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n$ CU vers $F$ sur $[-M, M]$ donc sur $[0,1]$

on peut intervertir $\int$ et $\sum$.

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(t+k)\, e^{-2i\pi n t}\, dt. \otimes$$

(chgt variable) $y = x+k$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} f(y)\, e^{-2i\pi n (y-k)}\, dy$$

$\exp(-2i\pi n t)$ est 1 périodique.

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} f(y)\, e^{-2i\pi n y}\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-2i\pi n y}\, dy = f^*(n)$$

donc $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f^*(n)\, e^{2i\pi n x}$

---

Formule de Poisson $\quad e^{-\pi n^2 s} = e^{-\pi s n^2}$

→ on utilise $f(x) = e^{-\alpha x^2}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

et on a $x^2 e^{-\alpha x^2} \underset{\pm\infty}{=} \mathcal{O}(1)$ donc bornée

Calcul des coeff. $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\quad f^*(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-2i\pi n t}\, dt \underset{\sqrt{\alpha}t = u}{=} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} e^{-\frac{2i\pi n u}{\sqrt{\alpha}}}\, du$

posons $x = \frac{n}{\sqrt{\alpha}}$

$$f^*(n) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}\, e^{-\pi^2 \frac{n^2}{\alpha}}$$

formule vraie pour $x=0$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\alpha n^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi^2 n^2/\alpha}$$

$\forall s>0$, vraie pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, posons $\alpha = \pi s$

on obtient $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi s n^2} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/s}$

X-ENS Analyse 1
p 308
⊕ Gourdon p 177

* Calcul de $\forall x \geq 0$ $I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-2i\pi tx}\, dt = \sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2 x^2}$

Rq : On va montrer que $I(x)$ vérifie une éq. diff. que l'on sait résoudre

soit $f(x,t) = e^{-t^2} e^{-2i\pi tx}$

1) $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable car $|f(x,t)| \leq e^{-t^2}$

et en $\pm\infty$, $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ Riemann..

2) $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable et $\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = -2i\pi t\, e^{-t^2} e^{-2i\pi tx}$

3) $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $\left| \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \right| = \left| -2i\pi t\, e^{-t^2} e^{-2i\pi tx} \right| \leq 2\pi |t|\, e^{-t^2}$

et $|t|\, e^{-t^2}$ est intégrable car $o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

On peut appliquer le thm de dérivation sous le signe intégrale.

d'où $I'(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} 2i\pi\, t\, e^{-t^2} e^{-2\pi tx}\, dt$

$= i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-2t e^{-t^2}\right) e^{-2i\pi tx}\, dt.$

On veut faire une IPP, pb cvg en $-\infty$ et $+\infty$

$i\pi \int_{-N}^{N} \left(-2t\, e^{-t^2}\right) e^{-2i\pi tx}\, dt$ IPP.

$= i\pi \left( \left[ e^{-t^2} e^{-2i\pi tx} \right]_{-N}^{N} + 2i\pi x \int_{-N}^{N} e^{-t^2} e^{-2i\pi tx}\, dt \right)$ $u = e^{-t^2}$ $u' = -2t\, e^{-t^2}$ $v = e^{-2i\pi tx}$ $v' = -2i\pi x\, e^{-2\pi tx}$

$\left[ e^{-t^2} e^{-2i\pi tx} \right]_{-N}^{N=t} = e^{-N^2} e^{-2i\pi Nx} - e^{-N^2} e^{2i\pi Nx}$

$= e^{-N^2} \underbrace{\left( e^{-2i\pi Nx} - e^{2i\pi Nx} \right)}_{\text{borné}}$

donc $\lim_{N \to \infty} \underline{\quad} = 0$

donc $\boxed{I'(x) = -2\pi^2 x\, I(x)}$

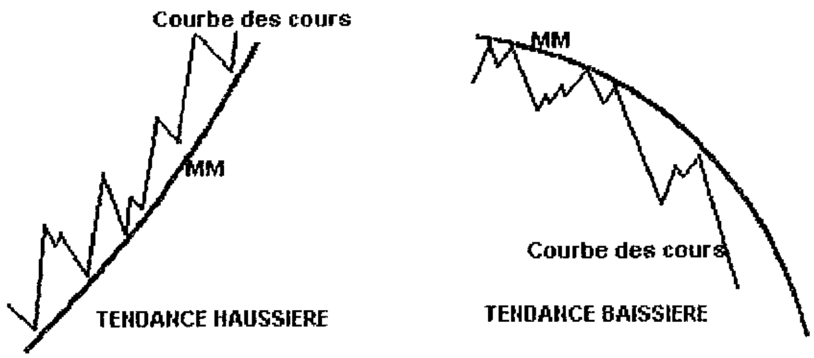
②

Eq diff $\quad I(x) = I(0)\, e^{-2\pi^2 \int_0^x t\,dt}$

$$= I(0)\ e^{-\frac{2\pi^2}{2}x^2}$$

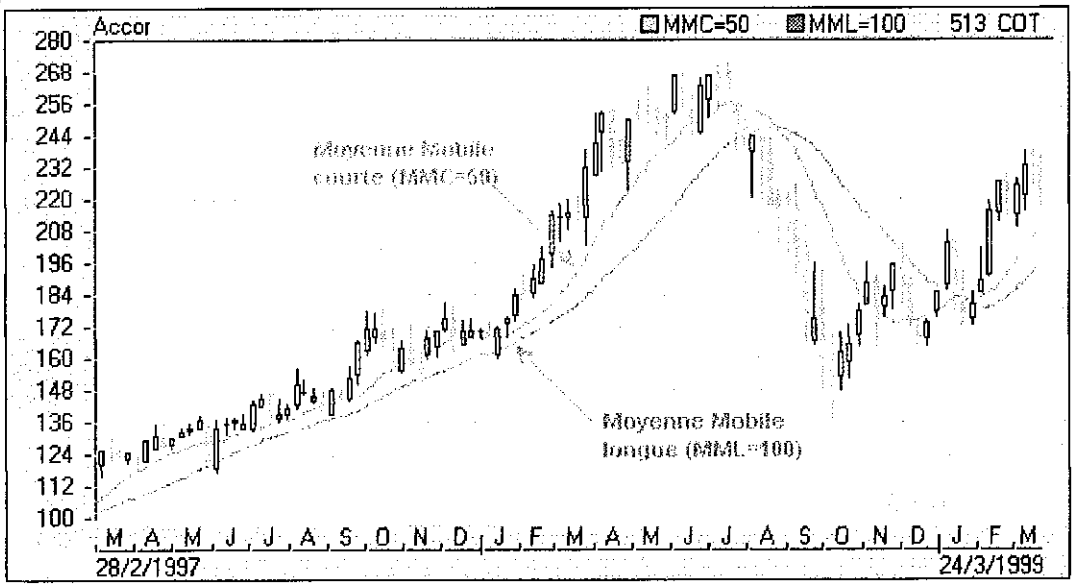
$$= I(0)\ e^{-\pi^2 x^2}$$

et $I(0) = \sqrt{\pi} \rightarrow \underline{\text{OK}}$




(26)

Les moyennes mobiles peuvent être calculées sur différentes périodes, ce qui permet de dégager des tendances à court terme (20 séances selon les habitudes de la branche), moyen terme (50-100 séances) ou long terme (plus de 200 séances).




(27)

Les croisements des moyennes mobiles par la courbe des cours de la valeur génèrent des signaux d'achat ou de vente selon les professionnels suivant le cas:

- signal d'achat: lorsque la courbe des cours franchit la MM vers le haut sur de bons volumes de transactions et que la MM sert de support à la courbe des cours.

- signal de vente: lorsque la courbe des cours franchit la MM vers le bas et que la MM sert de résistance à la courbe des cours.

D7. La "moyenne pondérée" qui est définie par :

$$\mu_p = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} p_i}$$

# Transformée de Fourier d'une Gaussienne

Intégrale de Gauss. $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$.

$I^2$ et passage aux coord. polaires.

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy \quad (\text{Fubini})$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta \qquad \begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{+\infty} d\theta \qquad J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & +r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,d\theta = \pi \qquad = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta).$$

d'où $\underline{I = \sqrt{\pi}}$.

$$\mu_a - \mu_g > 0 \Leftrightarrow \mu_a > \mu_g$$

Nous prouvons maintenant $\mu_q > \mu_a$ et démontrons-le par l'absurde en posant $\mu_q - \mu_a < 0$ :

$$\mu_q - \mu_a = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} - \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} - \frac{x_1 + x_2}{2} < 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} < \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} < \frac{x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2}{4}$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 < \frac{x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2}{2} \Rightarrow x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2 < 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 < 0$$

Or le carré d'un nombre est toujours positif ce qui vérifie notre hypothèse initiale :

$$\mu_q - \mu_a > 0 \Leftrightarrow \mu_q > \mu_a$$

Nous avons donc bien :

$$\mu_h < \mu_g < \mu_a < \mu_q$$

Démontrons par l'absurde que $MM_p > MM_s$ en posant $x_2 > x_1$ et que $MM_p < MM_s$ . Nous avons alors :

$$\frac{x_1 + 2x_2}{3} < \frac{x_1 + x_2}{2} \Leftrightarrow \frac{2x_1 + 4x_2}{3} < x_1 + x_2 \Leftrightarrow \frac{4}{3}x_2 - x_2 < x_1 - \frac{2}{3}x_1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x_2 < \frac{1}{3}x_1 \Leftrightarrow x_2 < x_1 \quad (50)$$

Il y a donc contradiction avec l'hypothèse initiale et nous avons donc bien :

$$MM_p > MM_s = \mu_a \quad (51)$$

Ces inégalités démontrées, nous pouvons alors passer à une figure que nous attribuons à Archimède pour placer trois de ces moyennes. L'intérêt de cet exemple est de montrer qu'il existe des relations remarquables parfois entre la statistique et le géométrie (fruit du hasard ???).