Formule du crible.

Soit $A_1, A_2, \dots A_n$ des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \right)$$

Démonstration par récurrence (Escoffier p18)

Notons $\mathcal{P}_n =$ « $\forall (A_1, \dots, A_n)$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2})$$

$$\vdots$$
$$+ (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$
$$\vdots$$
$$+ (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$ »

1) pour $n=1$, évident

pour $n=2$ (pour donner la méthode)

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \cap \overline{A_1}) \quad \text{(union disjointe)}$$

donc $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \cap \overline{A_1})$ (1)

or $A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap \overline{A_1})$ (union disjointe)

$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_1) + \mathbb{P}(A_2 \cap \overline{A_1})$

donc $\mathbb{P}(A_2 \cap \overline{A_1}) = \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_1)$

(1) $\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_1)$

Supposons n vrai, montrons $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup \left(A_{n+1} \cap \left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}\left(A_{n+1} \cap \left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right)\right)$$

On décompose $A_{n+1} = \left(A_{n+1} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right) \cup \left(A_{n+1} \cap \left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right)\right)$ disjoint

donc $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(A_{n+1} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right)$ (*)

on utilise 1e fois l'hypothèse de récurrence sur $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \dots + (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$$
$$+ \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \quad (A)$$

et $\mathbb{P}\left(A_{n+1} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_{n+1} \cap A_i)\right)$

$$\underset{\text{hyp.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < n} \mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \dots$$
$$+ (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n+1}) \quad (B)$$

$$\underset{A+B}{(*)} = \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \dots + (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots A_{i_k})$$
$$+ \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_{i_1} \cap A_{i_2})\right.$$
$$\left. + (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n+1})\right)$$

$$= \sum_{1 \leq i \leq n+1} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n+1} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \dots + (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots A_{i_k})$$
$$+ \dots + (-1)^{n} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots A_{n+1})$$

$\Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

<u>Seconde démonstration par calcul de somme.</u> TEO MPSI p1412

Pour tout événement A, $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$. En appliquant cette relation à tous les événements qui interviennent dans le membre de droite, on obtient une comb. linéaire des $\mathbb{P}(\{\omega\})$

1/ Soit ω un élément de Ω qui appartient à exactement $p \geq 1$ des sous-ensembles A_k $(1 \leq k \leq n)$. Montrer que le coeff de $\mathbb{P}(\{\omega\})$

est $\sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \binom{p}{k}$. Calculer cette somme.

2°/ Conclure.

<u>Solution</u> :

L'élément $\mathbb{P}(\{\omega\})$ apparait une fois dans chaque terme $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$ tel que $\omega \in A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$.

Si $k > p$, c'est impossible.

Si $k \leq p$, le nombre de termes $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$ où apparait $\mathbb{P}(\{\omega\})$ est le nombre d'ensembles $\{i_1, \ldots, i_k\}$ tel que $\omega \in A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$.

Il s'agit de choisir k indices parmi les p indices i tq $\omega \in A_k$

$\rightarrow$ il y en a $\binom{p}{k}$

Cela est vrai pour tout k tel que $1 \leq k \leq p$. On en déduit que le coefficient de $\mathbb{P}(\{\omega\})$ est $\sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \binom{p}{k}$

Calcul de la somme :

$$\sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \binom{p}{k} = -\sum_{k=1}^{p} (-1)^{k} \binom{p}{k} = -\sum_{k=0}^{p} (-1)^{k} \binom{p}{k} + 1$$

$$= -(1-1)^p + 1 = 1$$

2°/ Si $\omega \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ alors $\exists\, p \geq 1$ tel que $\omega \in$ à exactement p des sous-ensembles A_k. Alors le coeff de $P(\{\omega\}) = 1$

Si $\omega \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ alors $P(\{\omega\})$ n'apparait pas dans la somme son coeff est nul.

$$\sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \right) = \sum_{\omega \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

<u>Troisième solution, avec des indicatrices</u> TEU MPSI ex 30.3 p 1522

1°/ Mq $1 - \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{1}_{A_i})$

2°/ En déduire $\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$

3°/ En déduire la formule du crible.

<u>Solution</u> = pour tout $\omega \in \Omega$

1°/ $\prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{1}_{A_i}(\omega)) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\overline{A_i}}(\omega) = \mathbb{1}_{\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}}(\omega) = 1 - \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}(\omega)$

2°/ Par développement.

$$1 - \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \mathbb{1}_{A_i}(\omega)\right)$$

$$= 1 + \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{\operatorname{card} I} \prod_{i \in I} \mathbb{1}_{A_i}$$

$$= 1 + \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{\operatorname{card} I} \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i}$$

on regroupe toutes les sommes qui contiennent k éléments (pour I)

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = -\sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{\operatorname{card} I} \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i}$$

$$= \sum_{I \subset [\![1,n]\!]} (-1)^{\operatorname{card} I - 1} \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots A_{i_k}}$$

3°/ Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$