Formes linéaires

Def 1 : E un Kev. Une forme linéaire sur E est une application linéaire $\varphi : E \to K$.

$E^* := \{ \varphi$ formes linéaires sur $E \}$ est l'espace dual de E.

Puisque $\mathcal{L}(E,F)$ est un K-ev alors E^* l'est aussi.

$$f,g \in \mathcal{L}(E,F) \quad (f+g)(v) = f(v) +_F g(v) \qquad +_F \text{ et } \cdot_F \text{ lois dans } F$$
$$(\lambda f)(v) = \lambda \cdot_F f(v)$$

dim $\mathcal{L}(E,F)$ avec E et F de dimension finie

$$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$$

Si E est de dimension finie, alors $\dim E^* = \dim E$ donc isomorphes comme $\mathbb{K}$-ev

Cas général E, F K-ev de dim finie, on utilise 2 bases pour envoyer l'une sur l'autre. Isomorphisme n'est donc pas unique.

⚠ Ce n'est pas canonique

Prop Soit $\varphi \in E^*$ et $\varphi \neq 0$

$\dim(\operatorname{Ker} \varphi) = n-1$ et $\operatorname{Ker} \varphi$ est un hyperplan de E. (*)

$\varphi \longrightarrow \operatorname{Ker} \varphi$ un hyperplan déterminé par φ

$\longrightarrow H$ déterminé par quelles formes linéaires

(*) par le théorème du rang $E = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \underbrace{\dim \operatorname{Im} \varphi}_{=1 \text{ car } \varphi : E \to \mathbb{K}}$

Th Soit E de dimension finie avec $(e_1, \dots e_n)$ base de E

On définit les formes linéaires $\varepsilon_j(e_i) = \delta_{ij}$

alors $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ base de E^*

Def : $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est la base de E^* duale de $(e_1, \dots e_n)$

Montrons qu'elle est libre.

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varepsilon_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varepsilon_j(e_i) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_i = 0$$

et de dim n, donc c'est une base

Def : Soit F un sous-ev de E

On appelle annulateur (ou orthogonal) de F est

$$F^0 = \{ \varphi \in E^* \mid \forall v \in F \quad \varphi(v) = 0 \}$$

Théorème : ① F^0 est un sev de E^*

② Soit $(v_1, \dots, v_p)$ base de F

$$F^0 = \{ \varphi \in E^* \mid \forall i = 1 \dots p \quad \varphi(v_i) = 0 \}$$

③ Si $\dim E$ est finie alors $\dim E = \dim F + \dim F^0$

Demo ③ : Soit $(v_1, \dots v_p)$ une base de F, en particulier, elle est une famille libre de E. On la complète en une base de E $\underbrace{(v_1, \dots v_p, v_{p+1} \dots v_n)}_{\mathcal{B}}$

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_p, \varphi_{p+1}, \dots, \varphi_n) = \mathcal{B}^*$ la base de E^* duale à $\mathcal{B}$

Il suffit de montrer que $(\varphi_{p+1}, \dots, \varphi_n)$ est une base de F^0

Famille libre d'après la définition de $\mathcal{B}^*$ $\varphi_i(v_j) = 0$ $\forall i \geq p+1, \dots n$ $\forall j = 1 \dots p$

donc $\varphi_{p+1}, \dots \varphi_n$ appartiennent à F^0

<u>libre</u>? elles est indépendante car $\varphi_{p+1}, \dots, \varphi_n$ est une sous-famille de $\mathcal{B}^*$ (base)

<u>Génération</u>? Soit $\varphi \in F^0$

$\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$

$$\begin{cases} F \subset E \\ F^0 \subset E^* \end{cases}$$

car

On applique $0 = \varphi(v_1) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(v_1) = \lambda_1$

$0 = \varphi(v_2) = \lambda_2$

$\vdots$

pour tout $j = 1, \dots p$

donc $\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_{p+1}, \dots \varphi_n)$

<u>Déf</u>: $f : E \to F$ une application.

On définit ${}^t f : F^* \longrightarrow E^*$
$\varphi \longmapsto \varphi \circ f$

$$\underbrace{E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{\varphi} K}_{\varphi \circ f}$$

$\forall \varphi \in F^*$

$$\underbrace{{}^t f(\varphi)}_{E^*} \underbrace{(v)}_{v \in E} = \underbrace{\varphi}_{\in F^*} \underbrace{(f(v))}_{\in F}$$

${}^t f$ est la transposée de f.

<u>Théorème</u>: $\mathcal{B}$ base de E $\quad \mathcal{B}^*$ base de E duale à $\mathcal{B}$

$\mathcal{C}$ ——— de F $\quad \mathcal{C}^*$ ——— E duale à $\mathcal{C}$

et $f : E \to F$

Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*, \mathcal{C}^*}({}^t f) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$

Exercice 1 -

a) $\dim H = n-1$, $H \subset E$ $\dim E = n$

Soit $(e_1, \dots e_{n-1})$ base de H, on complète cette famille libre en une base de E $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$

Soit $\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) := x_n$

alors $\operatorname{Ker} \varphi = H$.

On a alors $\varphi : E \to E/_H \simeq \mathbb{K}$. par quotient.

$v \mapsto v + H$

Relation d'équivalence $v - w \in H$

classe d'équivalence est $v + H$

Deux cas.

b) $\Leftarrow$ $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \omega = E$ alors $\varphi = 0 = \omega$

sinon Soit $(e_1, \dots e_{n-1})$ base de $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \omega$ et on complète en une base $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ de E

Soit $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$\varphi(v) = x_n \varphi(e_n)$ $\varphi(e_n) \neq 0$

$\omega(v) = x_n \omega(e_n)$ $\omega(e_n) \neq 0$ car $e_n \notin \operatorname{Ker} \varphi$

$$\varphi = \underbrace{\frac{\varphi(e_n)}{\omega(e_n)}}_{\lambda} \omega \quad \text{et} \quad \omega(e_n) \neq 0$$

c) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} \text{trace}$ base $\operatorname{Vect}\left\{ \begin{matrix} E_{ij} \ i \neq j \\ E_{11} - E_{ii} \end{matrix} \right\}$

$E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$ (E_{il}) base

Avec la trace $\operatorname{Ker} \text{Trace} = \{ \underbrace{E_{ij} \ i \neq j}_{n^2 - n \text{ él}} ; \underbrace{E_{11} - E_{ii}}_{n-1 \text{ él}} \}$

(à cause de la contrainte linéaire de la trace)

donc $\dim \operatorname{Ker} \operatorname{Tr} = n^2 - 1$

Idée = On prend chaque élément de Ker Tr et on veut montrer l'égalité des Ker

$$f(E_{12}) = f(E_{11} E_{12}) \quad \text{par exemple.}$$

f est linéaire

$$= f(E_{12} E_{11}) = f(0) = 0 \qquad = \underbrace{E_{21}}_{=0} E_{11}$$

par hypothèse de l'énoncé

(*) $0 \in M_n(\mathbb{K}) \to 0$ rationnel

$i \neq j$ $\quad f(E_{ij}) = f(E_{ii} E_{ij}) = f(E_{ij} E_{ii}) = f(0) = 0$

et $\quad f(E_{11}) = f(E_{1i} E_{i1}) = f(E_{i1} E_{1i}) = f(E_{ii}) \quad i = 2 \dots n$

donc $f(E_{11}) - f(E_{ii}) = 0$

$f(E_{11} - E_{ii}) = 0$ car f est une forme linéaire.

donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} Tr$, par utilisation de la question précédente

Ils sont donc proportionnels.

Agrégation interne
2021/2022
Mathématiques

Formes Linéaires

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 1. On appelle forme linéaire sur E une application linéaire $\varphi : E \to \mathbb{K}$.
L'ensemble des ~~applications~~ formes linéaires est noté E^* et est appelé espace dual de E.

Proposition 1. *Soit E de dimension finie n et $\varphi \in E^*$ une forme linéaire non nulle. Alors la $\dim(\ker \varphi) = n-1$. Le noyau de φ est appelé l'hyperplan de E déterminé par φ*

Théorème 2. *Soit E de dimension finie n et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Considérons les formes linéaires $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ définies par*

$$\forall v \in E \quad \varepsilon_i(v) = x_i \quad \text{où } v = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$$

Alors $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de E^*.

Définition 2. La base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E^* est appelée la base duale de $(e_1, \dots, e_n)$

Définition 3. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle annulateur de F, l'ensemble de toutes les formes linéaires $\varphi \in E^*$ tels que $\varphi(v) = 0$ pour tout $v \in F$. Il est noté F^0.

$$F^0 = \{\varphi \in E^* | \, \forall v \in F, \ \varphi(v) = 0\}$$

Théorème 3. *Soit F un sous-espace vectoriel de E et $(v_1, \dots, v_p)$ une base de F. Alors*

$$F^0 = \{\varphi \in E^* | \, \varphi(v_1) = 0, \dots, \varphi(v_p) = 0\}$$

Théorème 4. *Soit E de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors*

$$\dim E = \dim F + \dim F^0$$

Définition 4. Soient E et F des $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \to F$ une application linéaire. On définit une application linéaire, appelé transposée de f par

$${}^t f : F^* \to E^* \qquad {}^t f(\varphi) = \varphi \circ f$$

Théorème 5. *Soient E et F des $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors Soit $\mathcal{B}$, respectivement $\mathcal{C}$, une base de E, respectivement $\mathcal{C}$. Alors*

$$Mat_{\mathcal{C}^*, \mathcal{B}^*}({}^t f) = {}^t Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$$

Exercices

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n

1. Montrer que tout sous-espace de E dimension $n-1$ est le noyau d'une forme linéaire.
2. Soient $\varphi, \omega \in E^*$. Montrer que
$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \ \lambda \neq 0 \text{ tel que } \varphi = \lambda \omega \iff \ker \varphi = \ker \omega$$
3. (Agrégation interne 2021) Démontrer que si f est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$ telle que $f(MN) = f(NM)$ pour toute matrice M et N de $M_n(\mathbb{K})$, alors f est proportionnelle à la trace. On pourra utiliser les matrices élémentaires $E_{i,j}$.

Exercice 2. Soit $(v_1, \dots, v_n)$ la base de $\mathbb{R}^n$ où

$$v_1 = {}^t(1, 1, \dots, 1), \ v_2 = {}^t(0, 1, 1, \dots, 1), \ v_3 = {}^t(0, 0, 1, 1, \dots, 1), \ v_n = {}^t(0, 0, \dots, 0, 1)$$

Déterminer la base de $(\mathbb{R}_n)^*$ duale de celle-ci.

Exercice 3. On considère les formes linéaires suivantes sur $\mathbb{R}^3$: Pour $v = {}^t(x, y, z)$

$$\varphi_1(v) = 2x - y + 3z \ , \ \varphi_2(v) = 3x - 5y + z \ , \ \varphi_3(v) = 4x - 7y + z$$

Forment-elles une base du duale de $\mathbb{R}^3$? Déterminer les éventuelles relations linéaires.

Exercice 4. On considère les formes linéaires suivantes sur $\mathbb{R}^3$: Pour $v = {}^t(x, y, z)$

$$\varphi_1(v) = x + 2y + z \ , \ \varphi_2(v) = 2x + 3y + 3z \ , \ \varphi_3(v) = 3x + 7y + z$$

Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une bade de $(\mathbb{R}^3)^*$. Déterminer la base duale de celle-ci (en identifiant $\mathbb{R}^3$ avec $(\mathbb{R}^3)^{**}$).

Exercice 5. Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n Ãă coefficients dans $\mathbb{R}$. Montrer que la base duale de la base $(1, X, \dots, X^n)$ est formée des formes linéaires $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ où $\varphi_k(P) = \frac{1}{k!} P^{(k)}(0)$.
Reconnaître la formule $P = \sum \phi_k(P) X^k$.

Exercice 6. Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n Ãă coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour $x_0, \dots, x_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$, définissons les applications $\varphi_j(P) = P(x_0)$.

1. Montrer que φ_j sont des formes linéaires sur E et que la famille $\mathcal{B} = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^*.
2. Quelle est la base de E duale de $\mathcal{B}$ (ces derniers s'appellent les polynômes d'interpolation de Lagrange).

Exercice 7. Montrer que E est canoniquement isomorphe à E^{**}.

Exercice 8. Soient E et F des $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \to F$ une application linéaire.

1. Montrer que ${}^t f$ est bien une application de F^* dans E^*.
2. Montrer que ${}^t f$ est une application linéaire.
3. Vérifier les relations suivantes :

(a) ${}^t(f+g) = {}^tf + {}^tg$

(b) ${}^t(\lambda f) = \lambda\, {}^tf$

(c) ${}^t(f \circ g) = {}^tg \circ {}^tf$

(d) ${}^t({}^tf) = f$

(e) si f est bijective, ${}^tf$ est aussi bijective et ${}^t(f^{-1}) = ({}^tf)^{-1}$

4. On suppose que E et F sont de dimension finie et soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des base de E et F respectivement. Notons $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{C}^*$ les bases duales associées. Montrer que $Mat_{\mathcal{C}^*,\mathcal{B}^*}({}^tf) = {}^tMat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.
5. En déduire les relations : ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ et ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

Exercice 9. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F et G des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

1. $F \subset G \implies G^0 \subset F^0$
2. $(F+G)^0 = F^0 \cap G^0$
3. $F^{00} = F$
4. $(F \cap G)^0 = F^0 + G^0$

Exercice 10. Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

1. Montrer que : $(\mathrm{Im} f)^0 = \ker({}^tf)$.
2. En déduire que si E et F sont de dimension finie alors $\mathrm{rg} f = \mathrm{rg}\, {}^tf$
3. et que par consequent pour toute matrice $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{rg} A = \mathrm{rg}\, {}^tA$.