Dev : Fonction ζ de Riemann.

Pour tout $s>1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$

1) Montrer que ζ est bien définie. Étudier la convergence simple, absolue, normale et uniforme de la série de fonction — Monier AP p325 5.3.1 a)

2) ζ est C^1 sur $]1;+\infty[$ et exprimer sa dérivée — Analyse

3) Mq $\forall s>1$ $\quad \zeta(s)-1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} \leq \zeta(s)$ — Analyse

4) En déduire que

$$\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = 1 \quad \text{et} \quad \zeta(s) \underset{1^+}{\sim} \frac{1}{s-1}$$ — Analyse

5) $\zeta(s) = 1 + 2^{-s} + \underset{s\to+\infty}{o}(2^{-s})$ — Monier 5.3.21 p330

6) Développement asymptotique de $\zeta(s)$ quand $s\to 1^+$ — Dantzer

Preuve : 1) • convergence simple :

$\forall s>1 \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ converge car $s>1$ (Riemann)

• convergence normale : $\forall n\geq 1 \quad \sup_{s\in]1,+\infty[} |f_n(s)| = \frac{1}{n}$

et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge donc pas de convergence normale sur $]1;+\infty[$

Soit $a \in]1;+\infty[$, on a

$\forall n\geq 1 \quad \sup_{x\in[a;+\infty[} |f_n(s)| = \frac{1}{n^a}$ et $\sum \frac{1}{n^a}$ cvg (Riemann)

donc convergence normale pour chaque intervalle $[a;+\infty[$ $a>1$

• convergence uniforme :

Pour $s>1$, l'application $t \mapsto \frac{1}{t^s}$ est décroissante sur $[1;+\infty[$

et que $\frac{1}{t^s}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$, on utilise la comparaison série-intégrale :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in]1;+\infty[$

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \geqslant \int_{n+1}^{+\infty} t^{-x}\,dt = \frac{(n+1)^{-x+1}}{-x+1}$$

On en déduit que R_n n'est pas bornée sur $]1;+\infty[$

Pas de convergence uniforme sur $]1;+\infty[$

2) Carnet de voyage en Analystan p 40 / exo 20 | Dantzer p 311.

Pour montrer que ζ est C^1 sur $]1;+\infty[$, il suffit de montrer qu'elle est C^1 sur tout intervalle de la forme $[a;+\infty[$ où $a>1$

Fixons $a>1$, ζ est limite simple sur $]1;+\infty[$ de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}$$

Montrons que la série des dérivées cvg unif sur $[a;+\infty[$

$$\forall s > a \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{n^s}\right) = -\frac{\ln n}{n^s}$$

Soit $a = 1+2h$, $h>0$

$$\frac{\ln n}{n^a} = \frac{\ln n}{n^h} \times \frac{1}{n^{1+h}} = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{1+h}}\right) \quad \text{car } h \text{ est fixé.}$$

Comme $h>0$, d'après le critère de Riemann, $\frac{1}{n^{1+h}}$ cvg donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n^a}$ aussi.

Et $\forall s \geqslant a \quad 0 \leq \frac{\ln n}{n^s} \leq \frac{\ln n}{n^a}$

$\sum_{n\geqslant 1} \frac{-\ln n}{n^s} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{n^s}\right)$ converge normalement donc uniformément sur l'intervalle $[a;+\infty[$

D'où ζ est de classe C^1 sur cet intervalle et que sa dérivée est donnée par

$$\forall s \geq a \quad \zeta'(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{-\ln n}{n^s}$$

Ceci est valable pour tout $a > 1$ donc sur $]1;+\infty[$

3) outils : critère de Riemann + comparaison série - intégrale.

Soit $s > 1$, $k \in \mathbb{N}^*$, l'application $t \mapsto \frac{1}{t^s}$ est décroissante sur le segment $[n;n+1]$

et la fonction est intégrable sur $]1;+\infty[$

$$\frac{1}{(n+1)^s} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^s}\,dt \leq \frac{1}{n^s}$$

d'après 1), on a convergence sur $]1;+\infty[$, donc on peut passer à la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^s} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{t^s}\,dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

4) d'où $\forall s > 1$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s}\,dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n^s$

$$\zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s}\,dt \leq \zeta(s)$$

$$\zeta(s) - 1 \leq \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s)$$

$\forall s > 1$, on obtient l'encadrement.

$$\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq \frac{1}{s-1} + 1$$

donc quand $s \to 1^+$ $\quad \zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$

Pour la limite en $+\infty$: ζ est série à termes positifs dont le premier terme est 1. Donc $\forall s > 1$ $\quad 1 \leq \zeta(s)$

soit $\quad 1 \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}$

d'après le th des gendarmes $\quad \zeta(s) \xrightarrow[s \to +\infty]{} 1$

5) $\forall s>1 \quad \zeta(s) - 1 - \frac{1}{2^s} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$

comme $t \mapsto \frac{1}{t^s}$ décroit et est intégrable sur $[2\,;+\infty[$,

par comparaison série-intégrale.

$$0 \leq \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \leq \int_2^{+\infty} t^{-s}\,dt = \frac{2^{-s+1}}{s-1} \underset{s\to+\infty}{=} o\left(2^{-s}\right)$$

donc $\zeta(s) = 1 + 2^{-s} + \underset{+\infty}{o}\left(2^{-s}\right)$.

6) On veut montrer que $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$

On définit $\forall n \in \mathbb{N}^*$ l'application

$$u_n : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$s \longmapsto \frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s}$$

1) mq $\forall s>0 \ \forall n \geq 1 \quad 0 \leq u_n(s) \leq \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}$

c'est évident car $\frac{1}{(n+1)^s} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{n^s}$ (comp.)

2) Soit $A>0$, mq $\sum_{n\geq 1} u_n$ est uniformément convergente sur $[A\,;+\infty[$

§ Vérifions que la suite des sommes partielles vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $[A\,;+\infty[$.

Soient n,p 2 entiers >0 tq $n<p$

$$\forall s \geq A \quad \left|S_p(s) - S_n(s)\right| = \sum_{k=n+1}^{p} u_k(s) \leq \sum_{k=n+1}^{p} \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s}\right)$$
$$= \frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{(p+1)^s} \leq \frac{1}{(n+1)^s} \leq \frac{1}{(n+1)^A}$$

Soit $\varepsilon>0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\frac{1}{(n_0+1)^A} \leq \varepsilon$

Alors $\forall n \geq n_0 \ \forall p \geq n_0 \ \forall s \in [A\,;+\infty[\quad \left|S_p(s) - S_n(s)\right| \leq \varepsilon$

La suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge unif sur $[A\,;+\infty[$

il en est de même pour la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

3) Mq la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

Soit $A>0$, mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$, l'application u_n est continue sur $[A;+\infty[$

l'application $s \mapsto \frac{1}{n^s}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $f : [A;+\infty[\times [n;n+1] \to \mathbb{R}$

$$(s,t) \longmapsto \frac{1}{t^s}$$

est continue sur $[A;+\infty[\times [n;n+1]$

De plus, $\forall (s,t) \in [A;+\infty[\times [n;n+1] \quad 0 \leq f(s,t) \leq \frac{1}{t^A}$

$g(t) = \frac{1}{t^A}$ est continue sur $[n,n+1]$.

Donc l'application $F : [A;+\infty[\to \mathbb{R}$

$$s \mapsto \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s}$$ est continue sur $[A;+\infty[$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, l'application u_n est continue sur $[A;+\infty[$. La série $\sum_{n\geq 1} u_n(s)$ est unif. conv. sur $[A;+\infty[$, elle est donc continue sur cet intervalle.

Donc la série $\sum_{n\geq} u_n(s)$ est continue sur $\bigcup_{A>0}]A;+\infty[= \mathbb{R}_+^*$

4) Vérifions que $\forall s>1 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$

Les séries $\frac{1}{n^s}$ et $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s}$ convergent vers $\zeta(s)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} = \frac{1}{s-1}$

d'où $\forall s>1 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$

5) Or $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(1) = \gamma$ et l'application $\sum_{n\geq 1} u_n(s)$ est continue en 1

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(1) + o(1) = \gamma + o(1)$

donc $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$

Dantzer p 311
Delaunay MP* p 275

Fonction Zeta de Riemann

On pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

a) Montrer que ζ est définie et de classe C^∞ sur $]1;+\infty[$

b) En effectuant une comparaison série-intégrale, mq

$$\forall s>1 \quad \zeta(s)-1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s)$$

c) En déduire $\lim_{s\to+\infty} \zeta(s)=1$ et $\zeta(s) \underset{1^+}{\sim} \frac{1}{s-1}$

d) Monotonie et convexité de ζ

e) Équivalent de la fonction ζ en 1^+

f) Convexité de $x \mapsto \ln(\zeta(x))$

Solution :

On introduit les fonctions sommées :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x} \quad \text{pour } x>1 \text{ et } n\in\mathbb{N}^*$$

ζ est la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

a) La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement par comparaison avec les séries de Riemann, sur $]1,+\infty[$.

donc ζ est bien définie sur $]1,+\infty[$

Montrons qu'elle est C^1 :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $]1;+\infty[$ et $f_n' = -\frac{\ln n}{n^x}$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$

$\forall n\in\mathbb{N}^* \ \forall x \in]1+2a;+\infty[\quad |f_n'(x)| \leq \frac{\ln n}{n^{1+2a}}$

or $\frac{\ln n}{n^{1+2a}} = o\left(\frac{1}{n^{1+a}}\right)$ croissance comparée.

donc la série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement sur $]1,+\infty[$.

Et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, l'application f_n' est continue sur $]1;+\infty[$

donc ζ est de classe C^1 sur $]1;+\infty[= \bigcup_{a>0}]1+2a;+\infty[$

avec $\forall s \in]1;+\infty[\quad \zeta'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\ln n}{n^s}$.

Pour C^∞ : $\forall p \in \mathbb{N} \quad f_n^{(p)}(x) = (-1)^p \frac{(\ln n)^p}{n^x}$

Soit $a>1$, $\forall x \in [a;+\infty[$ et $\forall p \in \mathbb{N}$

$$|f_n^{(p)}(x)| \leq \frac{(\ln n)^p}{n^x} \leq \frac{(\ln n)^p}{n^a} = \alpha_n$$

<u>Rq</u> on montre la convergence de la série de tg $\frac{(\ln n)^p}{n^a}$ par comparaison avec une série de Riemann d'exposant légèrement inférieur à a.

Soit $\rho \in]1,a[$ (ρ existe car $a>1$)

$$\begin{aligned}
n^\rho \alpha_n &= \exp(\rho \ln n) \times \exp(-a \ln n) \times \exp(p \ln(\ln n)) \\
&= \exp(\rho \ln n - a \ln n + p \ln(\ln n)) \\
&= \exp((\rho-a)\ln n + p\ln(\ln n)) \\
&\underset{+\infty}{=} \exp\Big(o(\ln n) + \underbrace{(\rho-a)}_{<0} \ln n\Big) \xrightarrow[+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

d'où $\alpha_n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\rho}\right)$ avec $\rho>1$.

La série de tg α_n est absolument convergente.

Donc $\forall p \in \mathbb{N}$ $\sum f_n^{(p)}$ converge normalement <u>donc</u> uniformément sur $[a;+\infty[$.

Donc ζ est de classe C^∞ sur $]1;+\infty[$

et $\forall p \in \mathbb{N}$ $\forall x \in]1;+\infty[$

$$\zeta^{(p)}(x) = (-1)^p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^p}{n^x}$$

b) Soient s un réel strictement positif et $k \in \mathbb{N}^*$

l'application $s \mapsto \frac{1}{t^s}$ est décroissante sur $[k, k+1]$.

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^s} \, dt \leq \frac{1}{k^s}$$

$\forall s > 1$, les séries de t.g. $\frac{1}{(k+1)^s}$ et $\frac{1}{k^s}$ sont convergentes

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^s} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} \, ds \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$$

donc $\forall s > 1 \quad \zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \, ds \leq \zeta(s)$

et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \, ds = \frac{1}{s-1}$

c)