Fonction continue sur $\mathbb{R}$ mais nulle part dérivable

Rodot p466

Th il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ mais nulle part dérivable.

Preuve. Avec des questions.

On introduit les fonctions $g : \begin{array}{l}[-1,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x|\end{array}$ prolongée en $\mathbb{R}$ en posant $\forall x \in \mathbb{R}\ g(x+2) = g(x)$

et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n g(4^n x)$$

1) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2) En utilisant l'intervalle $]4^n x - \frac{1}{2}, 4^n x + \frac{1}{2}[$

a) montrer qu'il existe un nombre réel $h_n = \pm \frac{1}{2 \cdot 4^n}$ qui ne contient aucun nombre entier relatif sur l'intervalle ouvert $4^n x$ et $4^n(x+h_n)$

b) Pour $k > n$, montrer que $g(4^k(x+h_n)) - g(4^k x) = 0$

c) Pour $k \in [\![0,n]\!]$, montrer que $\dfrac{g(4^k(x+h_n)) - g(4^k(x))}{h_n} = \varepsilon_k 4^k$ avec $\varepsilon_k = \pm 1$

3) Conclure en étudiant le taux de variation de f en x et $x+h_n$

Solution : 1) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(\frac{3}{4}\right)^n g(4^n x)\end{array}$

On a $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| = 1$ donc $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \left(\frac{3}{4}\right)^n$

et $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ est une série géométrique de raison <1

donc $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et $\sum_{n\geq 0} f_n$ CU sur $\mathbb{R}$

donc

$f=\sum_{n\geq 0} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$

2) L'idée est de montrer pour $x\in\mathbb{R}$ que

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ n'a pas de limite finie quand $h\to 0$

On va construire une suite $(h_n)\to 0$ et montrer que $\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}$

n'a pas de limite finie.

a) Soit $x\in\mathbb{R}$ et soit $n\in\mathbb{N}^*$

$\forall (u,v)\in \left]4^n x-\frac{1}{2}, 4^n x+\frac{1}{2}\right[$, $|u-v|<1$

donc s'il existe un entier sur $\left]4^n x-\frac{1}{2}, 4^n x\right[$, il n'en

existe pas sur $\left]4^n x, 4^n x+\frac{1}{2}\right[$ et vice-versa.

<u>Donc</u> il existe $h_n=\pm\frac{1}{2\,4^n}$ tel qu'il n'existe aucun entier

(1) relatif dans l'intervalle ouvert $4^n x$ et $4^n(x+h_n)$

b) $\forall k>n$ $g(4^k(x+h_n))=g\left(4^k x\pm\frac{4^{k-n}}{2}\right)$

$=g\left(4^k x\pm 2^{2(k-n)-1}\right)$

donc

si $k>n$, $2^{2(k-n)-1}=2^p$ avec $p\in\mathbb{N}^*$

Or $\forall x\in\mathbb{R}$ $g(x+2)=g(x)$, (2-périodique)

$g(4^k(x+h_n))=g(4^k x)$

d'où $g(4^k(x+h_n))-g(4^k x)=0$ pour $k>n$

c) Si $0 \leq k \leq n$, il n'existe pas d'entiers relatifs dans $]4^k(x+h_n), 4^k x[$

en effet, s'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $4^k(x+h_n) < q < 4^k x$

alors $4^n(x+h_n) < 4^{n-k} q < 4^n x$

et $4^{n-k} q \in \mathbb{Z}$ ce qui contredit ① (construction de h_n)

donc si $k \in [\![0,n]\!]$ $4^k(x+h_n)$ et $4^k x$ sont des intervalles

où la pente de g est ± 1

Th des accroissements finis pour g sur $]-1,0[$ ou $]0,1[$, continue et dérivable,

$$\begin{cases} g(4^k(x+h_n)) - g(4^k x) = 4^k(x+h_n) - 4^k x = 4^k h_n \\ g(4^k(x+h_n)) - g(4^k x) = -(4^k(x+h_n) - 4^k x) = -4^k h_n \end{cases}$$

donc $\forall k \in [\![0,n]\!]$ $\dfrac{g(4^k(x+h_n)) - g(4^k x)}{h_n} = 4^k \varepsilon_k$ avec $\varepsilon_k = \pm 1$

3) $$\left| \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} \right| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \frac{g(4^k(x+h_n)) - g(4^k(x))}{h_n} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k \frac{g(4^k(x+h_n)) - g(4^k x)}{h_n} \right| \quad \text{(pi b))}$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k 4^k \varepsilon_k \right| = \left| \sum_{k=0}^{n} 3^k \varepsilon_k \right|$$

$$\geq 3^n - \sum_{k=0}^{n-1} 3^k = 3^n - \frac{1-3^n}{1-3}$$

$$= \frac{3^n}{2} + \frac{1}{2}$$

Passage à la limite $\lim_{n \to +\infty} \left| \dfrac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ avec $h_n \to 0$

donc f n'est pas dérivable en x.