Fonction Gamma

Réf :
- Monier Analyse n1
- Gourdon p167 p200
- Rombaldi (Ex et plus) p131
- Vetrane pour (Euler)
- Remi/warufe L2
- Francinou 11.7 p239

On appelle fonction Gamma, la fonction définie par

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$$

Francinou pour Déf / C^∞
pas la peine du C^1

1) Γ est définie sur $]0;+\infty[$

Posons $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
$(x,t) \mapsto e^{-t}\, t^{x-1}$

Notons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_x : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
$t \mapsto e^{-t}\, t^{x-1} = f(x,t)$

$\forall x \in \mathbb{R}$ f_x est positive et continue sur $]0;+\infty[$

donc $\Gamma(x)$ est définie lorsque f_x est intégrable sur $]0;+\infty[$

* en 0, $f_x(t) \underset{0}{\sim} t^{x-1}$ donc f_x est intégrable sur $]0;1]$ ssi $x>0$
(intégrale de Riemann sur $]0,1]$)

* en $+\infty$, $f_x(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc f_x est intégrable sur $[1;+\infty[$.

donc $\Gamma(x)$ est définie ssi $x \in]0;+\infty[$

2) Γ est continue sur $]0;+\infty[$

f est continue sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, f_x est intégrable sur $]0;+\infty[$.

Mq f satisfait à l'hypothèse de domination pour $x \in [a,b]$ avec $a<b$, intervalle compact inclus dans $\mathbb{R}_+^*$

- Pour $0<t\leq 1$, $x \mapsto t^{x-1}$ est décroissante donc

Pour $x \in [a,b]$ $\quad 0 < f(x,t) \leq t^{a-1}$

2) pour $t \geq 1$, $x \mapsto t^{x-1}$ est croissante

donc pour $x \in [a,b]$ $\quad 0 \leq f(x,t) \leq e^{-t} t^{b-1}$

$$\varphi :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \varphi(t) = \begin{cases} t^{a-1} & \text{si } t \in]0,1] \\ e^{-t} t^{b-1} & \text{si } t \in [1;+\infty[\end{cases}$$

φ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $]0;+\infty[$

$\forall (x,t) \in [a,b] \times]0;+\infty[\quad 0 < f(x,t) < \varphi(t)$

d'où Γ est continue sur $]0;+\infty[$ d'après le théorème de continuité sous le signe somme.

3) Montrer que Γ est de classe C^∞ sur $]0;+\infty[$

$\forall k \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1} dt$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, f est de classe C^k sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ avec

$$\forall (x,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1}$$

Soit $[a,b]$ compact inclus dans $\mathbb{R}_+^*$

$$\varphi_k :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto |\ln t|^k \varphi(t)$$

- Au voisinage de 0, on a $\varphi_k(t) = o\left(\frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$
- En $+\infty$, $\varphi_k(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

donc φ_k est positive, continue par morceaux et intégrable sur $]0;+\infty[$.

Par construction,

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[\quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \right| \leq \varphi_k(t)$$

Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, Γ est de classe C^k sur $\mathbb{R}_+^*$

avec $\mathcal{P}_k$: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1} dt$

On a vu que f est C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et définition de Γ assurent

les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe $\int$

la fonction φ_1 assure l'hyp de domination sur tout

segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$

Donc Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)\, e^{-t} t^{x-1} dt$$

donc $\mathcal{P}_1$ est vraie

Montrons que si $\mathcal{P}_k$ est vraie, alors $\Gamma^{(k)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

la classe C^{k+1} de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ donne la classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$

de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ et $\Gamma^{(k)}$ est définie pour tout $x \in]0,+\infty[$

les hypothèses du th de dérivation sous le signe somme sont

vérifiées pour $g = \frac{\partial^k f}{\partial x^k}$

Avec φ_{k+1}, on a $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}$ avec hypothèse de

domination sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$

donc $\Gamma^{(k)}$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, donc Γ est C^{k+1} avec

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \Gamma^{(k+1)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^{k+1} e^{-t} t^{x-1} dt$$

$\mathcal{P}_k$ étant héréditaire, donc Γ est de classe C^k sur $\mathbb{R}_+^*$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Γ est de classe C^∞

H

4) Montrer que $\forall \alpha > 0 \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$

Pour tout $\alpha > 0$, pour tout $0 < \varepsilon < A$:

$$\int_\varepsilon^A t^\alpha e^{-t}\, dt \underset{IPP}{=} \left[-t^\alpha e^{-t} \right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A \alpha t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$$

par passage à la limite $\varepsilon \to 0$ et $A \to +\infty$

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\, dt = \alpha \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt = \alpha \Gamma(\alpha)$$

→ En déduire que $\Gamma(n) = (n-1)!$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \left. -e^{-t} \right]_0^{+\infty} = 1 = 0! \quad \text{vraie}$$

Avec la relation précédente, si la propriété est vraie pour le rang n

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \times (n-1)! = n!$$

5) Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$$

changement de variable $u = \sqrt{t}$

$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du.$$

Méthode du Gourdon (p 167)

On utilise la fonction $g : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\, dt$$

La fonction $(t, x) \mapsto \dfrac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$ admet une dérivée partielle continue.

Avec le th de dérivabilité sous le signe intégral

g est dérivable et $\forall x \geq 0$

$$g'(x) = -2x \int_0^1 e^{-(t^2+1)x^2}\, dt$$

$$= -2x\, e^{-x^2} \int_0^1 e^{-t^2x^2}\, dt$$

changement de variable $u = tx$

$$g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2}\, du \quad ①$$

Si l'on pose $f : x \mapsto \int_0^x e^{-u^2}\, du$

$$① = -2 f'(x) f(x)$$

donc $\forall x \geq 0 \quad g(x) - g(0) = -(f^2(x) - f^2(0))$

donc $g(x) = \frac{\pi}{4} - f^2(x)$

Or $0 \leq g(x) \leq e^{-x^2} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

et f est positive.

donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$ soit $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Or $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2I = \sqrt{\pi}$.

6) Γ est convexe

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

Γ'' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ donc Γ est convexe

d'où Γ' est strictement croissante et s'annule une fois.

On remarque que $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.

D'après le théorème de Rolle, Γ' s'annule au moins une fois sur $]1,2[$.

77

finalement Γ' s'annule une fois et une seule sur $]1,2[$

Avec la relation : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et continuité de Γ en 1

$$\lim_{x\to 0} x\Gamma(x) = \Gamma(1) = 1 \quad \text{d'où } \Gamma(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$$

Γ est croissante sur $[2;+\infty[\subset [\alpha,+\infty[$

$$\forall x \geq 2 \quad \Gamma(x) \geq \Gamma(\lfloor x \rfloor) = (\lfloor x \rfloor - 1)!$$

donc $\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$

D'après la formule de Stirling $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$

$$x^y \underset{+\infty}{=} o(\Gamma(x))$$

7) $\forall x > 0 \quad \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ Ketrane / Fourlon p242

Soit $x > 0$, on pose $(g_n)_{n\geq 1}$ suite de fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par

$$g_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \mathbb{1}_{]0,n[}(t)$$

autrement dit $g_n(t) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) t^{x-1} \mathbb{1}_{]0,n[}(t)$

Définissons g sur $]0;+\infty[$ par $g(t) = e^{-t} t^{x-1}$

- chaque fonction g_n est continue sur $]0;+\infty[$

$$\forall t \in]0,n[\quad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(-t - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)$$

$$\text{donc } g_n(t) = \exp\left(-t - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right) t^{x-1} \mathbb{1}_{]0,n[}(t)$$

$$\text{donc } \lim_{n\to+\infty} g_n(t) = e^{-t} t^{x-1} = g(t)$$

$\ln$ est concave, on a $\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -\frac{t}{n}$ $\quad (\ln(x) \leq x - 1)$

$$\text{donc } |g_n(t)| \leq e^{-t} t^{x-1} = g(t)$$

Comme g est intégrable sur $]0;+\infty[$

aussi continue et positive.

D'après le th de convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} 1\!\!1_{]0,n[}(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt = \Gamma(x)$$

Si l'on pose $I_n(x) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$

on a $\lim_{n\to\infty} I_n(x) = \Gamma(x)$

Changement de variable $u = \frac{t}{n}$

$$I_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} n^x\,dt = n^x J_n(t)$$

Déterminer $J_n(t) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}\,dt$ IPP généralisée

$$u^{(n)}(t) = t^{x-1} \quad v(t) = (1-t)^n$$

Montrons par récurrence sur $k \in [\![0, n-1]\!]$

$$\mathcal{P}(k) : \begin{cases} v^{(k+1)}(t) = (-1)^{k+1} (1-t)^{n-k-1} \prod_{i=0}^{k} (n-i) \\ u^{(n-k-1)}(t) = \dfrac{t^{x+k}}{\prod_{i=0}^{k}(x+i)} \end{cases}$$

$\underline{k=0}$ $\quad v'(t) = -n(1-t)^{n-1}$ et $u^{(n-1)}(t) = \frac{1}{x} t^x \rightarrow$ vrai

pour $k \in [\![1, n-2]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ vraie

$$v^{(k+2)}(t) = \left((-1)^{k+1} (1-t)^{n-k-1} \prod_{i=0}^{k} (n-i)\right)'$$

$$= (-1)^{k+2} (1-t)^{n-k-2} (n-k-1) \prod_{i=0}^{k} (n-i)$$

$$= (-1)^{k+2} (1-t)^{n-(k+2)} \prod_{i=0}^{k+1} (n-i)$$

$$u^{(n-k-1)}(t) = \frac{t^{x+k}}{\prod_{i=0}^{k}(x+i)} \quad \text{donc} \quad u^{(n-k-2)}(t) = \frac{t^{x+k+1}}{(x+k+1)\prod_{i=0}^{k}(x+i)}$$

$$= \frac{t^{x+k+1}}{\prod_{i=0}^{k+1}(x+i)}$$

donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

De plus $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ $u^{(n-\ell-1)}(0) = 0$

$$v^{(\ell)}(1) = 0$$

On a donc $u(t) = \dfrac{t^{x+n-1}}{\prod_{i=0}^{n-1}(x+i)}$ $\quad v^{(n)}(t) = (-1)^n \prod_{i=0}^{n-1}(n-i) = (-1)^n n!$

donc $J_n(x) = \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k u^{(n-k-1)}(t)\, v^{(\ell)}(t)\right]_0^1}_{=0} + (-1)^n \int_0^1 u(t)\, v^{(n)}(t)\, dt$

$$J_n(x) = \frac{n!}{\prod_{i=0}^{n-1}(x+i)} \int_0^1 t^{x+n-1}\, dt$$

$$J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

d'où $\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{n!\, x^n}{x(x+1)\cdots(x+n)}$

221 223	**Intégrale impropre d'une f° cont. sur un int. de $\mathbb{R}$. Exples.** **Intégrale d'une f° dépend' d'un paramètre. Ptés, exples, app.**	Fonction Γ d'Euler	Monier 3 p220. Gourdon p162.

On va proposer de traiter en développement un exemple significatif: la fonction Γ d'Euler.
Cette fonction prolonge l'exponentielle à l'ensemble des réels (H.Prog.: et aussi des complexes, en fait, sauf en certains points).

Pour tout $x\in]0;+\infty[$, l'application $t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0;+\infty[$.

On appelle fonction Γ d'Euler l'application $\Gamma:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$, $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

I. Outils-Equivalence

- Equivalence
- Intégrale de référence de Riemann en 0
- Test du x^α
- Intégration par parties
- (in "*Intégrales dépendant d'un paramètre*"): Corollaire p.220, Monier 3
- Changement de variable.
- (in "*Intégrales dépendant d'un paramètre*"): th. de dérivabilité sous le signe intégral.

II. Développement

A. Existence (intégrabilité).

Notons F: $\left|\begin{array}{l}]0;+\infty[\times]0;+\infty[\to\mathbb{R} \\ (x,t)\mapsto t^{x-1}e^{-t}\end{array}\right.$.

$F(x,.):t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0;+\infty[$, ← *ce qui nous ramène ds le cadre de la leçon 221.*

→ Etude sur $]0;+\infty[$

Pour $x\in]0;+\infty[$ fixé, l'application $F(x,.):t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0;+\infty[$, positive ou nulle.

→ Etude à la borne 0:

$F(x,t)\underset{t\to0^+}{\sim} t^{x-1}$, et $t\mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur $]0;1]$ car $x-1>-1$, ie -(x-1)<1 (Equivalent à l'Intégrale de Riemann en 0).

Donc F(x,.) est intégrable sur $]0;1]$.

→ Etude à la borne $+\infty$:

$t^2F(x,t)=t^{x+1}e^{-t}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$, donc F(x,.) est intégrable sur $[1;+\infty[$ (Test du x^α en ∞).

→ Finalement, F(x,.) est intégrable sur $]0;+\infty[$.

B. Lien avec la factorielle.

a) Mq $\forall x\in]0;+\infty[$, $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

Soit $(\varepsilon,T)\in]0;1]\times[1;+\infty[$. (on se ramène sur un compact). On a, par une intégration par parties:

$$\int_\varepsilon^T t^xe^{-t}dt=\left[-t^xe^{-t}\right]_\varepsilon^T+\int_\varepsilon^T xt^{x-1}e^{-t}dt=\varepsilon^xe^{-\varepsilon}-T^xe^{-T}+x\int_\varepsilon^T t^{x-1}e^{-t}dt$$

D'où l'on déduit, en passant à la limite quand $\varepsilon\to0$ et $T\to\infty$:

$$\Gamma(x+1)\underset{Def}{=}\int_0^{+\infty}t^xe^{-t}dt=x\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt\underset{Def}{=}x\Gamma(x)$$

b) Mq $\forall n\in\mathbb{N}$, $\Gamma(n+1)=n!$

On raisonne par récurrence sur n. $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=\left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty}=1=0!$

Et si $\Gamma(n+1)n!$, alors $\Gamma(n+2)=(n+1)\Gamma(n+2)=(n+1)n!=(n+1)!$ (en utilisant le résultat du a)

C. Régularité: Γ est C^∞ sur]0;+∞[, et expression de $\Gamma^{(k)}$ ←in "*Intégrales dépendant d'un paramètre*".

Montrons que Γ est C∞ sur]0;+∞[, et que ∀k∈ℕ, ∀x∈]0;+∞[, $\Gamma^{(k)}(x)=\int_0^{+\infty}(\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}dt$.

Notons $F:\left|\begin{array}{l}]0;+\infty[\times]0;+\infty[\to\mathbb{R} \\ (x,t)\mapsto t^{x-1}e^{-t}=e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t}\end{array}\right.$

Comme l'exponentielle est C∞, les $\frac{\partial F}{\partial x},\dots,\frac{\partial^k F}{\partial x^k},\dots$ existent et sont continues sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$.

De plus: ∀k∈ℕ, ∀(x,t)∈ $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$, $\frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t)=(\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}$ (par récurrence sur k).

Soit K une partie compacte incluse dans]0;+∞[. Il existe (a;b)∈ℝ² tel que: $0<a\le 1\le b$ et $K\subset[a;b]$.

En posant de tels a et b, on aura, dans le "Max" de l'expression ci-dessous, l'un des deux exposants (b-1) positif, et l'autre (a-1) négatif. Le Max sera donc t^{b-1} pour t>1, et t^{a-1} pour t<1 (pour t=1, c'est indifférent).

Notons pour k∈ℕ: $\varphi_{K,k}:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ l'application définie par: ∀t∈]0;+∞[, $\varphi_{K,k}(t)=|\ln t|^k\, Max\left(t^{a-1},t^{b-1}\right)e^{-t}$.

En tant que produit et par composition, $\varphi_{K,k}$ est continue, ≥0, intégrable sur]0;+∞[.

Par ailleurs, on a: $\forall(x,t)\in K\times]0;+\infty[$, $\left|\frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t)\right|\le\varphi_{K,k}(t)$

Ainsi, pour tout k de ℕ, $\frac{\partial^k F}{\partial x^k}$ existe et est continue sur]0;+∞[×]0;+∞[, et vérifie l'hypothèse de domination locale sur]0;+∞[×]0;+∞[.

Le résultat voulu découle du Corollaire p.220, Monier 3 (intégrales à paramètres).

D. Une valeur: Γ(1/2) = √π. (+Gourdon) ←in "*Intégrales dépendant d'un paramètre*".

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}t^{-1/2}e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}2e^{-u^2}du$, en utilisant le changement de variable $u=\sqrt{t}$.

(GOU p.163) L'intégrale $I=\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du$ s'appelle l'intégrale de Gauss. Gourdon donne 2 méthodes de calcul.

Son calcul est plus simple avec un corollaire du Th. de Fubini, mais c'est hors sujet ici.

On considère g:[0;+∞[→ℝ, $g:x\mapsto\int_0^1\frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}dt$.

La fonction $(t,x)\mapsto\frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$ admet une dérivée partielle continue. On en déduit (th. de dérivabilité sous le signe intégral) que g est dérivable et que: $\forall x\ge 0,\quad g'(x)=-2x\int_0^1 e^{-(t^2+1)x^2}dt=-2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-(tx)^2}dt$.

Après le changement de variable u=tx, il vient:

$$g'(x)=-2e^{-u^2}\int_0^x e^{-u^2}du=-2f'(x)f(x),\text{ où } f:x\mapsto\int_0^x e^{-u^2}du.$$

En intégrant, on déduit:

∀x≥0, $g(x)-g(0)=-\left(f^2(x)-f^2(0)\right)$, donc $g(x)=\frac{\pi}{4}-f^2(x)$ (*)

Les inégalités $0\le g(x)\le e^{-x^2}\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$ entraînent $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$, et la fonction f étant positive, on en déduit avec (*) que:

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\sqrt{\frac{\pi}{4}}$, ce qui s'écrit $I=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Finalement, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2I = \sqrt{\pi}$.

E. Convexité. ←in "*Intégrales dépendant d'un paramètre*". (Monier 3 ex.2.5.57 p.224)

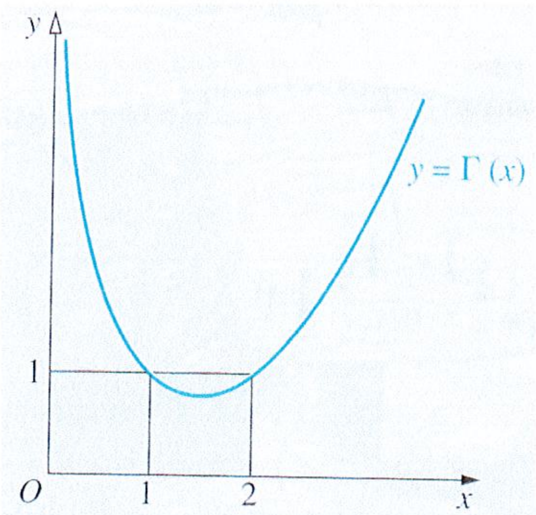
D'après C, Γ est C² sur]0;+∞[, et comme pour tout x de]0;+∞[on a $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt > 0$, Γ est convexe sur]0;+∞[.

F. Equivalent en 0$^+$.

in "*Intégrales impropres*": on admet que Γ est continue sur]0;+∞[.

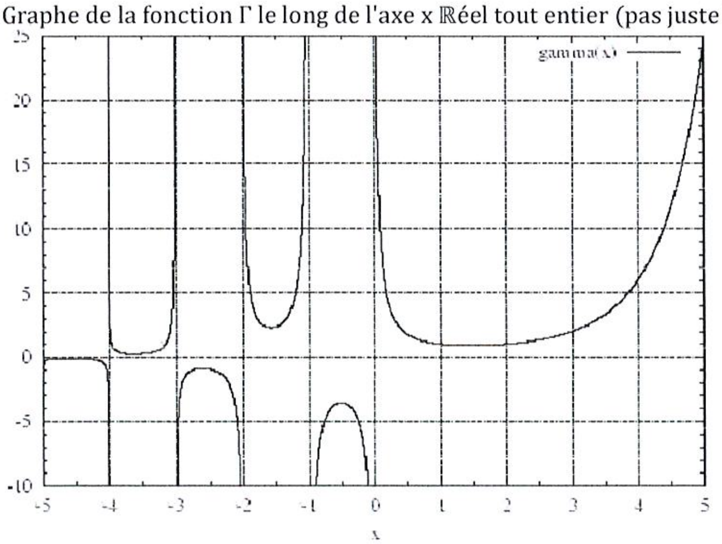
On a, d'après B, pour tout x de]0;+∞[, $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$. Comme Γ est continue sur]0;+∞[, on a donc: $\Gamma(x+1) \underset{x\to 0}{\to} \Gamma(1) = 0! = 1$, d'où $\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$.

G. Allure de la courbe.



III. Notes

Graphe de la fonction Γ le long de l'axe x ℝéel tout entier (pas juste ℝ+).



221 223	Intégrale impropre. Intégrale d'une f° dépend[t] d'un paramètre.	Fonction Γ d'Euler	Monier 3 p220. Gourdon p162.

(Wikipedia) Le logarithme de la fonction gamma est parfois appelé **lngamma**. Il intervient notamment dans la résolution des problèmes de propagation d'ondes : l'équation fonctionnelle de la fonction lngamma est :

$$\ln\Gamma(z) = \ln\Gamma(z+1) - \ln(z)\ .$$

La première occurrence de la fonction gamma dans la littérature est due à Daniel Bernoulli dans une lettre à Christian Goldbach.

St.-Pétersbourg ce 6 octobre 1729. **Dan. Bernoulli.**

P.S. Voici le terme général pour la suite $1+1.2+1.2.3+$etc. Soit x l'exposant du terme, et A un nombre infini, je dis que le terme général sera

$$\left(A+\frac{x}{2}\right)^{x-1}\left(\frac{2}{1+x}\cdot\frac{3}{2+x}\cdot\frac{4}{3+x}\cdots\frac{A}{A-1+x}\right)$$

Si au lieu de prendre A infiniment grand, on le fait $=$ à un nombre un peu grand, on aura le terme général à peu près. Si $x=\frac{3}{2}$ et qu'on fait $A=8$ on aura

$$\sqrt{\tfrac{17}{2}}\left(\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{8}{9}\cdot\tfrac{10}{11}\cdot\tfrac{12}{13}\cdot\tfrac{14}{15}\cdot\tfrac{16}{17}\right)=1{,}3005$$

par le moyen des logarithmes on approche très vitement. Si $x=3$ et $A=16$, au lieu de 6 on trouve $(6\,.\,17\tfrac{1}{2}\,.\,17\tfrac{1}{2}):17\,.\,18 = 6\tfrac{1}{204}$.

En notation moderne

$$x! = \lim_{n\to\infty}\left(n+1+\frac{x}{2}\right)^{x-1}\prod_{i=1}^{n}\frac{i+1}{i+x}$$