Devoir : Matrice hermitienne

Algèbre linéaire/Devoir/Décomposition polaire d'une matrice réelle

Décomposition polaire d'une matrice réelle

Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. L'objet de ce devoir est de décomposer M en produit d'une matrice orthogonale (unique si M est inversible) et d'une matrice (symétrique) positive (toujours unique, et inversible si M l'est).

1. Montrer que ${}^tMM$ est symétrique et positive.

   Elle admet donc une unique racine carrée symétrique positive, que l'on notera S.

2. Montrer que si $M = QT$ avec Q orthogonale et T symétrique positive, alors $T = S$.
3. Si M (donc aussi S) est inversible, montrer que la matrice $Q := MS^{-1}$ est orthogonale (ce qui conclut dans ce cas).
4. En déduire (par densité) la conclusion voulue sans supposer M inversible.
5. Retrouver ce cas général en construisant directement (sans passer par le cas particulier inversible) une matrice orthogonale Q telle que $M = QS$.

Corrigé [Enrouler]

1. ${}^tMM$ est clairement symétrique, et pour toute matrice colonne $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tX({}^tMM)X = {}^t(MX)MX = \|MX\|^2 \geq 0$.
2. Si $M = QT$ avec Q orthogonale et T symétrique, alors ${}^tMM = {}^t(QT)QT = {}^tT{}^tQQT = T\mathrm{I}_nT = T^2$, donc si de plus T est positive alors (par unicité de la racine carrée symétrique positive) $T = S$.
3. ${}^tQQ = {}^t(MS^{-1})MS^{-1} = {}^t(S^{-1}){}^tMMS^{-1} = ({}^tS)^{-1}S^2S^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = \mathrm{I}_n$.

4. Soit (M_n) une suite de matrices inversibles convergeant vers M, et $M_n = Q_n S_n$ leurs décompositions polaires. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut supposer (quitte à extraire une sous-suite) que (Q_n) converge. La limite Q est alors orthogonale (par continuité de l'application $A \mapsto {}^tAA$), et la limite $Q^{-1}M$ des $Q_n^{-1}M_n = S_n$ est symétrique positive (par continuité des applications $A \mapsto {}^tA$ et, pour toute matrice colonne $X \in \mathbb{R}^n$, $A \mapsto {}^tXAX$).
5. (On identifie ici tout endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ avec sa matrice dans la base canonique.) ${}^tSS = S^2 = {}^tMM$ donc pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^n$, $\|S(X)\| = \|M(X)\|$ (en particulier S et M ont même noyau). Par conséquent, il existe un isomorphisme isométrique $Q_1 : \mathrm{Im}(S) \to \mathrm{Im}(M)$ tel que pour tout X, $M(X) = Q_1(S(X))$. Par somme directe avec un isomorphisme isométrique arbitraire entre les orthogonaux de $\mathrm{Im}(S)$ et $\mathrm{Im}(M)$, on obtient la matrice Q voulue.

Autre point de vue et quelques compléments

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soient h, p, w des endomorphismes de E dont les matrices respectives, dans une certaine base orthonormée, sont les matrices M, S, Q ci-dessus.

1. Vérifier que $\forall x, y \in E \quad \langle p(x), p(y)\rangle = \langle h(x), h(y)\rangle$ et $\|p(x)\| = \|h(x)\|$. En déduire que $\ker p = \ker h$.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $p(e_i) = \|h(e_i)\| e_i$.
3. On suppose dans cette question que h est bijectif (donc p aussi d'après 1).
   1. Déduire de l'exercice 1-3 de la leçon « Réduction des endomorphismes » que w, p commutent si et seulement si h, h^* commutent.
   2. Déduire de la question 2 une expression de $w(e_i)$ en fonction de $h(e_i)$.
   3. Application : soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les deux matrices S et Q.
4. On ne suppose plus que h est bijectif, et l'on ordonne la base $(e_1, \dots, e_n)$ de la question 2 de telle sorte que $h(e_1), \dots, h(e_p)$ soient non nuls et $h(e_{p+1}), \dots, h(e_n)$ soient nuls.
   1. Comment faut-il choisir $w(e_1), \dots, w(e_n)$ pour définir un endomorphisme orthogonal w tel que $h = w \circ p$? Un tel w est-il unique ?
   2. Application : soit $M = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. Trouver deux matrices S symétrique et Q orthogonale telles que $M = QS$.

Solution [Enrouler]

1. $\langle p(x), p(y)\rangle = \langle x, p^*p(y)\rangle = \langle x, p^2(y)\rangle = \langle x, h^*h(y)\rangle = \langle h(x), h(y)\rangle$, en particulier $\|p(x)\|^2 = \|h(x)\|^2$, donc $p(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0$.
2. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E propre pour p, $p(e_i) = \lambda_i e_i$ avec $\|h(e_i)\| = \|\lambda_i e_i\| = \lambda_i$.

3. 1. $wp = pw \Leftrightarrow h = php^{-1} \Leftrightarrow hp = ph \Leftrightarrow$ (d'après les questions 1 et 2 de l'exercice mentionné, puisque $h^*h = p^2$ et $p = \sqrt{h^*h}$ sont diagonalisables et ont mêmes sous-espaces propres) $h(h^*h) = (h^*h)h \Leftrightarrow$ (en composant à droite par h^{-1}) $hh^* = h^*h$.
   2. $w(e_i) = h(p^{-1}(e_i)) = h(e_i/\|h(e_i)\|) = \dfrac{h(e_i)}{\|h(e_i)\|}$.
   3. ${}^tMM = 10\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $S = \sqrt{10}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et
   $$Q = MS^{-1} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. 1. On veut que les $w(e_i)$ forment une base orthonormée (pour que w soit orthogonal) et vérifient $\forall i \quad h(e_i) = w(p(e_i)) = w(\|h(e_i)\| e_i)$ c.-à-d. $\forall i \leq p \quad w(e_i) = \dfrac{h(e_i)}{\|h(e_i)\|}$. Il faut donc prendre $w(e_1), \ldots, w(e_p)$ donnés par cette formule, et choisir $w(e_{p+1}), \ldots, w(e_n)$ de telle sorte que $(w(e_1), \ldots, w(e_n))$ soit une base orthonormée (ceci généralise le cas $p = n$ de la question 3, mais pour $p < n$ le choix n'est évidemment pas unique).
   2. ${}^tMM = 9\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ a pour noyau (comme M) le plan d'équation $2x - y + 2z = 0$, c.-à-d. le plan $u^\perp$ avec $u = (2, -1, 2)$. Par conséquent, la droite $\mathbb{R}u$ doit être elle aussi stable par ${}^tMM$, c.-à-d. u doit être propre pour ${}^tMM$. Effectivement, le calcul donne ${}^tMMu = 81u$. Donc S est la matrice qui envoie $u^\perp$ sur 0 (comme ${}^tMM$) et telle que $Pu = 9u = {}^tMMu/9$, d'où

$S = {}^tMM/9 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Pour $e_1 = u/\|u\| = (2,-1,2)/3$ on a $Me_1 = 3(2,-1,-2)$. On cherche donc Q orthogonale telle que $Qe_1 = Me_1/\|Me_1\| = (2,-1,-2)/3 = f_1$. La méthode générale serait de choisir une base orthonormée (e_2, e_3) de $u^\perp$ puis de choisir f_2, f_3 tels que (f_1, f_2, f_3) soit une base orthonormée et de déterminer Q telle que $Q(e_i) = f_i$. Mais en remarquant que f_1 n'est autre que le symétrique orthogonal de e_1 par rapport au plan $z = 0$, on peut choisir simplement pour Q cette symétrie :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$