208
403

Étude d'un système dynamique

X-ENS Analyse T1
ex 2.13 p 85

Soit $\alpha \in]0,1]$, étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in]0,1[$
et $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} = 1 - \alpha x_n^2$

Solution.

Soit $f(x) = 1 - \alpha x^2$.

→ stabilité de $]0,1[$ $f(]0,1[) =]0,1[$ car $\alpha \in]0,1]$

→ f est décroissante sur $]0,1[$
car $f'(x) = -2\alpha x$

On en déduit que $f\circ f$ est croissante sur $]0,1[$
les deux suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc monotones

. Elles sont bornées, donc toutes les deux convergentes.

⇒ Reste à savoir si elles ont même limite !

D'après le cours, (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent vers un point fixe de $f\circ f$ sur $[0,1]$

$$\forall x \in [0,1],\quad f\circ f(x) - x = f(1-\alpha x^2) - x$$
$$= 1 - \alpha(1-\alpha x^2)^2 - x$$
$$= 1 - \alpha(1 - 2\alpha x^2 + \alpha^2 x^4) - x$$
$$= -\alpha^3 x^4 + 2\alpha^2 x^2 - x + (1-\alpha)$$

On peut factoriser car les points fixes de f sont aussi les points fixes de $f\circ f$. Factorisons par $f(x) - x = -\alpha x^2 - x + 1$

On trouve $f\circ f(x) - x = (-\alpha x^2 - x + 1)(\alpha^2 x^2 - \alpha x + (1-\alpha))$

1) l'équation $(-\lambda x^2 - x + 1) = 0$

$$\Delta = 1 + 4\lambda \qquad \lambda \in]0,1] \qquad \Delta > 0$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{\Delta}}{-2\lambda} \quad / \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{\Delta}}{-2\lambda}$$

$$x_1 = \underbrace{\frac{\sqrt{\Delta} - 1}{2\lambda}}_{>0} \quad / \quad x_2 = -\frac{1 + \sqrt{\Delta}}{2\lambda} < 0$$

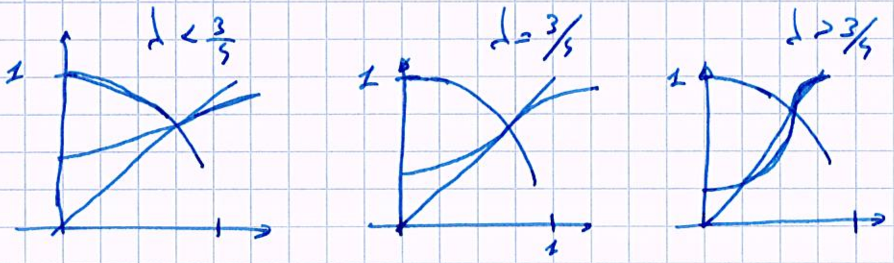
et $\underline{\ell} = \dfrac{\sqrt{1+4\lambda} - 1}{2\lambda} \underset{(1)}{} = \dfrac{(\sqrt{1+4\lambda} - 1)(\sqrt{1+4\lambda}+1)}{2\lambda(\sqrt{1+4\lambda}+1)} = \underline{\dfrac{2}{\sqrt{1+4\lambda}+1}}$

2) $\lambda^2 x^2 - \lambda x + (1-\lambda) = 0$

$$\Delta = \lambda^2 - 4\lambda^2(1-\lambda) = \lambda^2(4\lambda - 3)$$

Son signe dépend de la place de λ par rapport à $\frac{3}{4}$.

<u>3 cas</u> -



i) $\lambda < \frac{3}{4}$, $\lambda^2 x^2 - \lambda x + (1-\lambda) = 0$ n'a pas de solution.

le seul pt fixe de $f \circ f$ dans $[0,1]$ est ℓ (celui de f)

(x_{2n}) et (x_{2n+1}) cvg vers ℓ donc (x_n) cvg vers ℓ.

ii) $\lambda = \frac{3}{4}$ $\lambda^2 x^2 - \lambda x + (1-\lambda) = 0$ a une solution $\frac{1}{2\lambda} = \frac{2}{3} = \ell'$

et $\ell' = \ell$, même conclusion

iii) $\lambda > \frac{3}{4}$, $\ell_1 = \dfrac{1 - \sqrt{4\lambda - 3}}{2\lambda}$ $\quad \ell_2 = \dfrac{1 + \sqrt{4\lambda-3}}{2\lambda}$

(x_n) converge vers ℓ ?

$|f'(\ell)| = |-2\lambda\ell| \underset{(1)}{=} |\sqrt{1+4\lambda} - 1| = \sqrt{1+4\lambda} - 1 \underline{\underline{> 1}}$ car $\lambda > \frac{3}{4}$

ℓ est un point répulsif de f.

$\exists\, k \in]1, f'(\ell)[$, par continuité de f'

$\exists$ un voisinage de x, V tel que si $x \in V$ alors $|f'(x)| > k$

Supposons que (x_n) cvg vers ℓ. $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ x_n \in V$

Par inégalité des accroissements finis, $|f(x_n) - f(\ell)| \geq k\,|x_n - \ell|$

ie $|x_{n+1} - \ell| \geq k\,|x_n - \ell|$ pour $n \geq n_0$

d'où par réc. immédiate $|x_n - \ell| \geq k^{n-n_0}\,|x_{n_0} - \ell|$

si $x_{n_0} \neq \ell$ alors $\lim_{n\to+\infty} k^{n-n_0}|x_{n_0} - \ell| = +\infty$

contraire à l'hyp de cvg de (x_n)

donc $x_{n_0} = \ell$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Mais $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} = \ell \iff 1 - \lambda x_n^2 = 1 - \lambda \ell^2 \iff x_n^2 = \ell^2$

$\iff x_n = \ell$ car $x_n > 0$

donc (x_n) est stationnaire que si $x_0 = \ell$

Si $x_0 \neq \ell$, (x_n) ne converge pas. Les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) ne peuvent converger vers ℓ (car si $x_{2n} \to \ell$ alors $f(x_n) = \ell$, $x_{2n+1} = \ell$

et donc (x_n) cvg vers ℓ)

Elles ne peuvent pas avoir la même limite. L'une converge vers ℓ_1 et l'autre vers ℓ_2. $f(\ell_1) = \ell_2$ et $f(\ell_2) = \ell_1$

Or on a $\ell_1 < \ell < \ell_2$ (graphe ou calcul

$\sqrt{1+4\lambda} + \sqrt{4\lambda - 3} > 2 \iff \ell_1 < \ell$.

car $\lambda > \frac{3}{4}$)

f est décroissante, $f(\ell_1) > f(\ell)$ ie $\ell_2 > \ell$.

Si $x_0 < \ell$, alors $x_1 > \ell$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_{2n} < \ell$ et $x_{2n+1} > \ell$

car $[0, \ell[$ et $]\ell, 1]$ sont stables par $f \circ f$.

(x_{2n}) cvg. vers ℓ_1 et (x_{2n+1}) vers ℓ_2

si $x_0 > \ell$, on a l'inverse.