Montrer qu'un ensemble E est un espace vectoriel.

→ montrer que cet ensemble est un sev

i) montrer que cet ensemble contient 0 (non vide)

ii) $\forall u, v \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda u + v \in E$

→ $E = \operatorname{Ker} f$ (noyau d'une application linéaire)

→ $E = (u, v, w, \dots) = \operatorname{Vect}(u, v, w)$ E est l'ensemble de toutes les comb. linéaires de certains éléments

→ $E = \bigcap\limits_i E_i$ avec E_i sev

→ $E = \sum\limits_{i=1}^{n} E_i$ E_i sev

Montrer qu'une application $f : E \to F$ est linéaire

$$\forall (u, v) \in E \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

Montrer que des sous-espaces sont en somme directe/supplémentaires

i) On vérifie que $F \cap G = \{0\}$

ii) pour démontrer que 3 sev $E_1, E_2, E_3 \dots$ sont en somme directe, on prend $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, $x_3 \in E_3 \dots$ tq $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ et on prouve que $x_1 = x_2 = \dots = 0$

iii) 2 espaces sont supplémentaires.

a) ils sont en somme directe

b) par analyse synthèse, soit $x \in E$, on suppose que $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$, on cherche la valeur de y et z puis synthèse. $y = \dots$, $z = \dots$ on vérifie que $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.