113/ ①

<u>Dev :</u> <u>Espace vectoriel des formes n-linéaires alternées</u>

Rouxeau MPSI p268

TEU MPSI p1237

<u>Résultat :</u> l'ensemble $\Lambda_n(E)$ des formes n-li alternées sur un Kev de dim n $(n \geq 1)$ est 1 Kev de dimension 1.

Pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, on note $\det_{\mathcal{B}} : E \to \mathbb{K}$ l'application définie pour tout $(V_1, \dots, V_n)$ de E^n

$$\det_{\mathcal{B}}(V_1, \dots, V_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

où pour chaque $j \in [\![1, n]\!]$ $(a_{i_j, j})_{1 \leq i_j \leq n}$ sont les composantes de V_j dans $\mathcal{B}$

$$V_j = \sum_{i_j=1}^{n} a_{i_j j} e_{i_j}$$

L'élément $\det_{\mathcal{B}}(V_1, \dots V_n)$ de $\mathbb{K}$ est appelé déterminant de $(V_1, \dots V_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $(\det_{\mathcal{B}})$ est une base de $\Lambda_n(E)$

<u>Preuve</u>. <u>1e étape)</u> mq toute forme n-li. alternée φ s'écrit comme

$$\varphi(S) = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k), k}\right) \varphi(e_1, \dots, e_n) \quad \left(\varphi(S) = \det_{\mathcal{B}} \cdot \varphi(e_1, \dots e_n)\right)$$

<u>2e étape)</u> Si ψ est définie par $\psi(S) = \lambda \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k), k}\right)$

avec $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\begin{cases} \psi \text{ est une forme n-li.} \\ \psi \text{ est alternée.} \end{cases}$

<u>3e étape)</u> $\psi \neq 0$ car $\psi(\mathcal{B}) = 1$

<u>ccl</u> Toute forme n-linéaire est proportionnelle à $(\det_{\mathcal{B}})$ avec $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$

d'où c'est 1 Kev de dim 1

<u>Rq</u> Avant de commencer, quelques rappels (inutiles dans le plan)

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $E_1, \dots E_p, F$ des Kev

24

$\varphi : E_1 \times \dots \times E_p \to F$ est p linéaire ssi φ est linéaire par rapport à chaque variable.

$\forall i \in [\![1,p]\!]\ \forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall x_i \in E_i\ \forall y_i \in E_i$

$$\varphi(x_1, \dots x_{i-1}, \lambda x_i + y_i, x_{i+1}, \dots, x_p) = \lambda \varphi(x_1, \dots x_{i-1}, x_i, \dots x_p) + \varphi(x_1, \dots y_i \dots x_p)$$

Si : $F = \mathbb{K}$ alors φ est une forme linéaire.

* L'ensemble $\mathcal{L}_p(E_1, \dots E_p ; F)$ des applications p-linéaires de $E_1 \times \dots \times E_p \to F$ est un $\mathbb{K}$-ev.

$\left(\mathcal{L}_p(E_1, \dots, E_p ; F) \text{ sev de } F^{E_1 \times \dots \times E_p} \right)$

* Une application p-linéaire $\varphi : E^p \to F$ est dite alternée ssi pour tout couple (i,j) de $[\![1,p]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $\forall (x_1, \dots x_p) \in E^p$

$$x_i = x_j \Rightarrow \varphi(x_1, \dots, x_p) = 0$$

Cq = $\varphi : E^p \to F$ est alternée ssi : $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_p\ \forall (x_1, \dots x_p) \in E^p$

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)\, \varphi(x_1, \dots, x_p)$$

Exp = Soit $\varphi : E^p \to F$ p-linéaire alternée et $(x_1, \dots x_p) \in E^p$

Si $(x_1, \dots, x_p)$ est liée alors $\varphi(x_1, \dots, x_p) = 0$

Preuve du théorème : - Par définition de la linéarité, c'est un espace vectoriel.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E

Etape 1 : Soient $S = (V_1, \dots V_n) \in E^n$ et pour chaque $j \in [\![1,n]\!]$

$$(a_{i_j j})_{j \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } V_j = \sum_{j=1}^{n} a_{i_j j}\, e_{i_j}$$

Soit $\varphi : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée, calculons $\varphi(S)$

$$\varphi(S) = \varphi\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n} e_{i_n} \right)$$

$$\underset{\text{lin 1}^{\text{ère}}\text{ var}}{=} \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1}\, \varphi\left(e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2 2} e_{i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n} e_{i_n}\right)$$

$$\underset{\text{en } 2/3^{e}/.}{=} \; = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1} \cdots a_{i_n n} \, \varphi(e_{i_1}, \dots e_{i_n})$$

Comme φ est alternée $\varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$ est nul dès que $i_1, \dots i_n$ ne sont pas 2 à 2 distincts.

Il ne reste donc, dans la somme multiple précédente, que les termes correspondants au cas où $(1, \dots, n) \mapsto (i_1, \dots i_n)$ est une permutation de $[\![1, n]\!]$. (sinon il y a des répétitions et $\varphi(e_{i_1}, \dots e_{i_n}) = 0$)

$$\text{D'où } \; \varphi(S) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k) k} \; \varphi(e_{\sigma(1)}, \dots e_{\sigma(n)})$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k) k} \; \varepsilon(\sigma) \, \varphi(e_1, \dots e_n)$$

$$= \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k) k} \right) \varphi(e_1, \dots, e_n)$$

2nd Etape : Réciproquement soit $d \in \mathbb{K}$ et $\psi : E^n \to \mathbb{K}$ l'application définie par : pour tout $S = (V_1, \dots V_n) \in E^n$

$$\psi(S) = d \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k), k}$$

avec a_{ij} les composantes des V_j dans $\mathcal{B}$

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \quad V_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \, e_i$$

- ψ est n-linéaire :

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ $V_1, \dots V_{i-1}, V_i, V_i', V_{i+1}, \dots V_n$ de E

On a en notant $(a'_{ki})_{k \in [\![1, n]\!]}$ les composantes de V_i' dans $\mathcal{B}$

$$\psi(V_1, \dots, V_i + \alpha V_i', \dots V_n) = d \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \, a_{\sigma(1) 1} \cdots (\alpha a_{\sigma(i) i} + a'_{\sigma(i) i}) \cdots a_{\sigma(n) n}$$

$$= \alpha d \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \, a_{\sigma(1) 1} \cdots a_{\sigma(i) i} \cdots a_{\sigma(n) n} + d \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \, a_{\sigma(1) 1} \cdots a'_{\sigma(i) i} \cdots a_{\sigma(n) n}$$

$$= \alpha \, \psi(V_1, \dots V_i, \dots V_n) + \psi(V_1, \dots V_i', \dots V_n)$$

- ψ est alternée.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i<j$ et pour tout $(V_1, \dots V_n) \in E^n$ tel que $V_i = V_j$.

On pose le changement de variable $\sigma' = \sigma \circ \tau_{ij}$

avec τ la transposition de i et j

(Rq σ' est une involution)

$$\Psi(V_1, \dots V_n) = \lambda \sum_{\sigma \in \sigma_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \lambda \sum_{\sigma' \in \sigma_n} \varepsilon(\sigma')\, a_{\sigma'(1)1} \dots a_{\sigma'(n)n}$$

or $\varepsilon(\sigma') = \varepsilon(\sigma \circ \tau_{ij}) = \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\tau_{ij}) = -\varepsilon(\sigma)$

$$= -\lambda \sum_{\sigma' \in \sigma_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma'(1)1} \dots a_{\sigma'(n)n}$$

et $\begin{cases} a_{\sigma\tau_{ij}(i)\, i} = a_{\sigma(j)\, i} = a_{\sigma(j)\, j} & \text{car } V_i = V_j \quad \text{TEU p1260} \\ a_{\sigma\tau_{ij}(j)\, j} = a_{\sigma(i)\, j} = a_{\sigma(i)\, i} & \text{car } V_i = V_j \\ a_{\sigma\tau_{ij}(\ell)\, \ell} = a_{\sigma(\ell)\, \ell} & \text{inchangé} \end{cases}$

donc $$= -\lambda \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$$

donc $\Psi(V_1, \dots V_n) = -\Psi(V_1, \dots V_n)$

d'où $\Psi(V_1, \dots V_n) = 0$ (⚠ avec $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2 ! $2\Psi(\,) = 0$)

3^e étape : $\Psi \neq 0$

$\forall j \in [\![1,n]\!]$ décomposons e_j dans la base $\mathcal{B}$

$$e_j = \sum_{i_j=1}^{n} \delta_{i_j j}\, e_{i_j} \quad \text{avec } \delta_{i_j j} \text{ symbole de Kronecker}$$

$$\Psi(\mathcal{B}) = \sum_{\sigma \in \sigma_n} \varepsilon(\sigma)\, \delta_{\sigma(1)1} \dots \delta_{\sigma(n)n} = 1$$ car si $\sigma \neq Id_{[\![1,n]\!]}$

l'un des facteurs $\delta_{\sigma(j)j}$ est nul !

D'où, $\forall \mathcal{B}$ de E, les éléments de $\Lambda_n(E)$ sont proportionnels à $\det_{\mathcal{B}}$

et $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$

■

Rq on a unicité car $\varphi = \varphi(e_1, \dots, e_n) \det_B$
et $\varphi(e_1, \dots e_n) = 1$ donc $\varphi = \det_B$.

On en déduit les résultats principaux : $\beta(E)$ ensemble des bases de E

$\forall \varphi \in \Lambda_n(E)$ $\forall S \in E^n$ $\forall B \in \beta(E)$
$\varphi(S) = \varphi(B) \det_B(S)$

Preuve : $\varphi \in \Lambda(E)$ $B \in \beta(E)$ $\det_B$ engendre $\Lambda_n(E)$
$\exists \alpha \in \mathbb{K}$ $\varphi = \alpha \det_B$
d'où $\varphi(B) = \alpha \det_B(B) = \alpha$
d'où $\varphi = \varphi(B) \det_B$
$\forall S \in E^n$ $\varphi(S) = \varphi(B) \det_B(S)$

(φ et $\det_B$ sont proportionnels dans le rapport $\varphi(B)$)

$\forall B$ et $B' \in \beta(E)$ $\forall S \in E^n$ $\det_{B'}(S) = \det_{B'}(B) \det_B(S)$

(on applique le résultat précédent où $\varphi = \det_{B'}$)

Remarque importante : $B \in \beta(E)$ et $S \in E^n$
Alors S est liée ssi $\det_B(S) = 0$