zéros isolés (224) ①

$q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (E) $y'' + q(t)y = 0$

u, v 2 sol. linéair. indépendantes.

Idée $\boxed{Z_u \text{ l'ensemble des zéros}}$ (points d'annulation de u) de u.

1) Rq tout point de Z_u est isolé. ie

$$\boxed{\forall t_0 \in Z_u,\ \exists r>0 \quad Z_u \cap [t_0 - r, t_0 + r] = \{t_0\}}$$

2) t_0 un pt d'annulation de u.

Supposons u s'annule sur $]t_0, +\infty[$.

licite de considérer t_1 le plus petit point d'annulation de u sur $]t_0, +\infty[$

3) Sur $]t_0, t_1[$, v s'annule 1 et une seule fois.

---

1). $t_0 \in Z_u$, $u(t_0) = 0$ et u pas nulle (sinon (u, v) liée)

* donc $u'(t_0) \neq 0$

car si $u'(t_0) = 0$, u est application nulle seule sol. de l'éq. du problème de Cauchy.

$y'' + q(t)y = 0$ et $(y(t_0), y'(t_0)) = (0,0)$

→ unicité Cauchy-Lipschitz linéaire. $u = 0$

* u est dérivable sur $\mathbb{R}$. de en point t_0

$$\frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} \xrightarrow[t \neq t_0]{t \to t_0} u'(t_0)$$

et avec $u(t_0) = 0$ $\quad \frac{u(t)}{t - t_0} \xrightarrow[t \neq t_0]{t \to t_0} u'(t_0)$

cô $u'(t_0) \neq 0$, limite précédente assure que

$\exists r > 0$ tq $\forall t \in \mathbb{R} \cap [t_0 - r, t_0 + r] \setminus \{t_0\}$ $u(t) \neq 0$

d'où le résultat $\exists r > 0$ $Z_u \cap [t_0 - r, t_0 + r] = \{t_0\}$.

2) Soit A l'ensemble des points d'annulation de u sur $]t_0, +\infty[$

$$A = Z_u \cap]t_0, +\infty[$$

Mq A admet 1 plus petit élément.

A non vide car u s'annule sur $]t_0, +\infty[$ et minorée par t_0 de $\mathbb{R}$

donc possède une borne inférieure.

$t_1 = \inf A$ mq. $t_1 \in A$.

- Prouvons que $u(t_1) = 0$. Caractérisation séquentielle de la borne inf.

$\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$ tq $x_n \to t_1$

x_n à valeurs dans A et continuité de u

$(\forall n \in \mathbb{N} \ u(x_n) = 0)$ et $u(x_n) \to u(t_1)$

donc $u(t_1) = 0$

- Prouvons que $t_1 \in]t_0, +\infty[$.

$t_1 \geq t_0$ il faut justifier que $t_1 \neq t_0$.

d'après 1) t_0 est point isolé donc A de $\exists r > 0$

$Z_u \cap [t_0 - r, t_0 + r] = \{t_0\}$

Pour un tel r, on a $A \cap [t_0 - r, t_0 + r] = \emptyset$

donc $t_0 + r$ minore A. $t_0 + r \leq t_1$

$t_1 \neq t_0$.

3) v possède 1 et 1 seul pt d'annulation dans $]t_0, t_1[$

Existence $W = uv' - u'v$

$W' = 0$ donc est constant

comme il est non nul (u, v indep)

$\exists C \in \mathbb{R}^*$

$\forall t \in \mathbb{R} \ u(t)v'(t) - u'(t)v(t) = C$ (*)

$u(t_0)=0$ et u pas nulle $u'(t_0)\neq 0$

$u(t_1)=0$ $\quad u'(t_1)\neq 0$

u ne s'annule pas sur $]t_0,t_1[$ → sinon contradiction d'après le TVI

($f\in C([a,b],\mathbb{R})$, $a,b\in I$

$f(a)f(b)\leq 0 \Rightarrow \exists c\in[a,b]$

$f(c)=0$)

2 cas possibles

1er cas $\quad \forall t\in]t_0,t_1[\quad u(t)>0$

$$\forall t\in]t_0,t_1[\quad \frac{u(t)}{t-t_0}>0$$

et ici $u'(t_0)=\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t\neq t_0}}\dfrac{u(t)}{t-t_0}$ $\quad u'(t_0)\geq 0$ et donc $u'(t_0)>0$

de la même manière $u'(t_1)<0$,

2e cas $\quad \forall t\in]t_0,t_1[\quad u(t)<0$, $\quad u'(t_0)<0$ et $u'(t_1)>0$

dans les 2 cas (*) évaluée en t_0 et t_1 impose $v(t_0)\,v(t_1)<0$

TVI assure que v s'annule au moins 1 fois dans $]t_0,t_1[$

Unicité = entre 2 zéros de u, v s'annule au moins 1 fois.

u, v rôles symétriques

entre 2 zéros de v, u s'annule au moins 1 fois

donc si v possédait plus d'annulation dans $]t_0,t_1[$

u devrait aussi s'y annuler, ≠ avec déf t_1.