107
172

Encadrement de l'indice de nilpotence.

Soit E un $\mathbb{K}$ev de dim finie, $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent.

Soit q l'indice de nilpotence, $q \in \mathbb{N}^*$ $q = \inf \{p \in \mathbb{N}^* \mid f^p = 0\}$

1) mq $q \leq n$

2) si $r = \dim \operatorname{Ker} f$ alors $\frac{n}{r} \leq q \leq n+1-r$

1) Idée : montrer que la suite des images $(\operatorname{Im} f^p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et stationnaire

Au départ, pas besoin de supposer f nilpotente, f un endo suffit
→ (suite des images itérées)

Soit $k \in \mathbb{N}$, mq $\operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^k$

soit $y \in \operatorname{Im} f^{k+1}$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x)$

donc $y = f^k(f(x))$ et $y \in \operatorname{Im} f^k$.

donc $\underline{\operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^k}$.

La suite $(\operatorname{Im} f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

donc la suite des rangs (entiers naturels) décroît
$(\operatorname{rg} f^k)_{k \in \mathbb{N}}$. ⇒ il existe un plus petit entier

$s \in \mathbb{N}$ tq $\operatorname{rg} f^{s+1} = \operatorname{rg} f^s$ (+)

Comme $\operatorname{Im} f^{s+1} \subset \operatorname{Im} f^s$ on a donc $\operatorname{Im} f^{s+1} = \operatorname{Im} f^s$
(par égalité des dimensions (+))

et $\forall p \geq s$ par récurrence immédiate

$\operatorname{Im} f^{p+1} = f^{p-s}(f^{s+1}(E)) = f^{p-s}(f^s(E)) = f^p(E) = \operatorname{Im} f^p$

La suite des images $(\mathrm{Im}\, f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc stationnaire à partir d'un certain rang s.

(*)

Par définition de s, $\mathrm{rg}\, f^{p+1} \leq \mathrm{rg}\, f^p - 1$ lorsque $p<s$

d'où $\mathrm{rg}\, f^p \leq \mathrm{rg}\, f^0 - p = n-p$ pour $0\leq p<s$

Et en particulier $\mathrm{rg}\, f^s \leq \mathrm{rg}\, f^0 - s = n-s$

d'où $s \leq n$.

Pour terminer, f est nilpotente, $\mathrm{Im}\, f^p$ est stationnaire à partir du rang $q=p$, donc $q=s$ et $\underline{q\leq n}$

2) D'après (*), pour $p<q$ $\mathrm{rg}\, f^{p+1} \leq \mathrm{rg}\, f^p - 1$

d'où en utilisant la récurrence

$\mathrm{rg}\, f^q = 0 \leq \mathrm{rg}\, f - (q-1)$ (1)

et théorème du rang $\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{rg}\, f$

donc $\mathrm{rg}\, f = n - r$

(1) $\Leftrightarrow$ $0 \leq \mathrm{rg}\, f - (q-1) = n - r - q + 1$

soit $\underline{q \leq n - r + 1}$

Pour la seconde inégalité, $\frac{n}{r} \leq q$.

il faut faire apparaître le noyau de f

Montrons le lemme suivant :

$\forall p\in\mathbb{N}$ $\mathrm{rg}\, f^{p+1} = \mathrm{rg}\, f^p - \dim(\mathrm{Im}\, f^p \cap \mathrm{Ker}\, f)$ (*)

Soit S sev de E tel que $(\mathrm{Im}\, f^p \cap \mathrm{Ker}\, f) \oplus S = \mathrm{Im}\, f^p$ (1)

(tout sev F d'1 espace vectoriel admet au moins un supplémentaire - TEO MPS : p1098

$S \cap \mathrm{Ker}\, f \subset (\mathrm{Im}\, f^p \cap \mathrm{Ker}\, f) \cap S = \{0\}$ (car somme directe)

donc considérons la restriction de f à S : $f_{|S}$

$f_{|S}$ est injective car son noyau est réduit à 0

donc $\dim f(S) = \dim S$ (car $\dim \mathrm{Ker}\, f = 0$) th du rang

Or $\mathrm{Im}\, f^{p+1} = f(\mathrm{Im}\, f^p) = f(\underbrace{(\mathrm{Im}\, f^p \cap \mathrm{Ker}\, f)}_{=0 \text{ car } f(\mathrm{Ker}\, f)=0} \oplus S)$

$= f(S)$

d'où $\mathrm{rg}\, f^{p+1} = \dim f(S) = \dim S = \mathrm{rg}\, f^p - \dim(\mathrm{Im}\, f^p \cap \mathrm{Ker}\, f)$

d'après (1)

l'égalité (*) entraîne que $\forall p$ $\mathrm{rg}\, f^{p+1} \geq \mathrm{rg}\, f^p - r$

car $\dim(\mathrm{Im}\, f^p \cap \mathrm{Ker}\, f) \leq \dim \mathrm{Ker}\, f$.

soit en prenant $p = q$, $\mathrm{rg}\, f^q = 0 \geq \mathrm{rg}\, f^0 - qr$

$0 \geq n - qr$

d'où $\underline{q \geq \frac{n}{r}}$.