Dev : Ellipsoïde de John - Loewner (Ketrane)

Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

Enoncé modifié :

Notons Q (resp Q^+ et Q^{++}) l'ensemble des formes quadratiques (positives, resp définies positives)

1/ Montrer qu'à toute forme quadratique, on peut associer un ellipsoïde que l'on précisera

2/ Soit $\mathcal{E}_q$ cet ellipsoïde, montrer que V_q de $\mathcal{E}_q$ est proportionnel au volume V_0 de la boule unité pour la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$

3/ Montrer qu'il existe un ellipsoïde centré sur 0 de volume ~~log~~ minimal et contenant K.

Pour cela, on munit Q de la norme $N : q \mapsto \sup\limits_{\|x\| \leq 1} |q(x)|$

et on s'intéresse à $A = \{ q \in Q^+ \ \forall x \in K \ q(x) \leq 1 \}$

4/ Après avoir montré que A est convexe et en utilisant la log-convexité du déterminant sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$ conclure sur l'unicité.

1/ Soit $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle

Un ellipsoïde plein centré sur l'origine admet une équation du type

$q(x) \leq 1$ avec $q \in Q^{++}$

A tout $q \in Q^{++}$, on peut associer un ellipsoïde tel que

$\{ \forall x \in \mathbb{R}^n \ q(x) \leq 1 \}$

Comme $q \in Q^{++}$, on associe à q sa matrice S dans une base quelconque celle-ci est symétrique. $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

D'après le théorème spectral

$$\exists P \in O_n(\mathbb{R}) \quad S = {}^tPDP \quad \text{avec } D = \mathrm{Diag}(d_1 \dots d_n)$$

Les d_i sont valeurs propres de S ($\forall i \in [\![1,n]\!]$) et $d_i > 0$ car q est définie positif.

Dans cette nouvelle base orthonormée, q s'écrit sous la forme

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i^2$$

2/ Déterminons le volume V_q de E_q

$$V_q = \int \dots \int_{d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2} dx_1 \dots dx_n .$$

Soit le changement de variable $x_i = \dfrac{t_i}{\sqrt{d_i}}$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$ car $d_i > 0$

c'est bien un C^1 difféomorphisme.

Pour réaliser le changement de variable, il faut calculer le jacobien.

$$\text{Jacobien} = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\right)_{1 \le i,j \le n} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{d_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{d_n}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{d_1 \dots d_n}} \neq 0$$

De plus $\det S = \det({}^tPDP) = \det D . \underbrace{\det({}^tPP)}_{=1 \text{ car } P \text{ est orthogonale.}} = \prod_{i=1}^{n} d_i = D(q)$

$D(q)$ déterminant de S ne dépend pas de la base choisie. (base choisie)

$$\text{donc } V_q = \int \dots \int_{t_1^2 + \dots + t_n^2 \le 1} \frac{dt_1 \dots dt_n}{\sqrt{d_1 \dots d_n}} = \frac{1}{\sqrt{D(q)}} V_0$$

Rq on peut se demander si le volume est bien défini, en effet il semble dépendre de la base choisie. Or c'est faux, si on change de base, alors la matrice de passage est 1 matrice orthogonale, le jacobien du changement de variable est alors 1, donc le volume ne dépend pas de la base choisie.

3/ On se ramène à montrer l'existence d'un unique $q \in Q^{++}$ tel que

i) $D(q)$ est maximal.

ii) $\forall x \in K \quad q(x) \leq 1$

On munit espace vectoriel Q, de la norme $N : q \mapsto \sup_{\|x\| \leq 1} |q(x)|$ et on cherche à maximiser D sur $A = \{q \in Q^+, \forall x \in K \ q(x) \leq 1\}$

Montrons que A est compact (fermé, borné, non vide)

- Montrons que A est fermé :

Soit $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $q \in Q$ (cvg dans (Q, N))

Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$|q_n(x) - q(x)| = |(q_n - q)(x)| = \left|(q_n - q)\left(\frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|\right)\right|$$

$$= \|x\|^2 \left|(q_n - q)\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right|$$

$$\leq \|x\|^2 N(q_n - q) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n(x) = q(x)$

On a $q_n(x) \geq 0$ et $\forall x \in K \quad q_n(x) \leq 1$ donc par passage à la limite $q(x) \geq 0$ et $\forall x \in K \quad q(x) \leq 1$

donc $q \in A \Rightarrow A$ est fermé

- Montrons que A est borné

K compact non vide, donc $\exists b \in K \quad \exists r > 0 \quad B(b, r) \subset K$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, soit $q \in A$

prenons x tel que $\|x\| \leq r$

$\|(b+x)-b\| \leq r$ donc $(b+x) \in K$

donc $q(b+x) \leq 1$

et $q(-b) = q(b)$ et par l'inégalité de Minkowski
$(-b \in K)$

$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{q((b+x)-b)} \leq \sqrt{q(b+x)} + \sqrt{q(b)} \leq 2$$

donc $q(x) \leq 4$ pour $\forall x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| \leq r$

, on a $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \leq 1$

$$q(x) = \frac{1}{r^2} q(rx) \leq \frac{4}{r^2} \quad \text{donc } N(q) \leq \frac{4}{r^2}$$

donc A est borné.

. A non vide :

K est compact alors il est borné pour 1 certain R

$\exists R > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \|x\| \leq R$

alors la forme quadratique définie positive $q : x \mapsto \frac{\|x\|^2}{R^2}$

est dans A car $\forall x \in K \ q(x) \leq 1$

donc A est non vide.

B: Car A est 1 compact non vide de Q

Pour prouver l'existence, le déterminant est continu

l'application $D : q \mapsto D(q)$ l'est aussi

A compact, D est borné sur cet ensemble et atteint ses bornes

donc son max, notons le $q_0 \in A$.

Comme $x \mapsto \frac{\|x\|^2}{\|R\|^2}$ (forme quadratique déf. positive et donc de déterminant > 0 est 1 élt de A)

D'où $D(q_0) > 0$ soit $q_0 \in Q^{++}$

Il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}_{q_0}$ de volume minimal contenant K.

Reste à montrer son unicité.

On a besoin de la convexité de A

Soit q et $q' \in A$ et $\lambda \in [0,1]$

$\lambda q + (1-\lambda) q' \in Q^+$

preuve car $\begin{cases} (\lambda q + (1-\lambda) q')(x) = \lambda q(x) + (1-\lambda) q'(x) \geq 0 \\ \forall x \in K, \ (\lambda q + (1-\lambda) q')(x) \leq \lambda + (1-\lambda) = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ donc $\lambda q + (1-\lambda) q' \in Q^+$

A est convexe

Supposons $\exists q \in A$, $q \neq q_0$ tel que $D(q) = D(q_0)$

Comme A est convexe $\frac{q+q_0}{2} \in A$ et d'après la stricte log concavité du déterminant sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$

$$D\left(\frac{q+q_0}{2}\right) = \det\left(\frac{1}{2}(S+S_0)\right) > \sqrt{\det S}\sqrt{\det S_0} = \det S_0 = D(q_0)$$

or $D(q_0)$ est maximal donc absurde.

Compléments.

stricte log concavité du déterminant. (X ENS Alg 3 ex 3.31)

Théorème : (pseudo-réduction simultanée)

Soient S_1 et S_2 2 matrices symétriques réelles de taille n, S_1 étant définie positive. Alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ et D diagonale réelle telles que

$${}^tP S_1 P = I_n \quad \text{et} \quad {}^tP S_2 P = D$$

Prop Inégalité de Minkowsky

Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-ev E. Si q est positive

alors $\forall x, y \in E$

$$\sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$$

Lemme : Soit A et B deux matrices symétriques réelles définies positives

$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$ tels que $\alpha + \beta = 1$

alors $\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$

Démo : par le théorème de pseudo-réduction simultanée

$\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{Diag}(d_1, \ldots d_n)$ $d_i \in \mathbb{R}$

tel que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$

Or $d_i > 0$ car B définie positive

donc $(\det A)^\alpha (\det B)^\beta = (\det P)^{2\alpha} (\det P)^{2\beta} (\det D)^\beta$

$= (\det P)^{2\alpha + 2\beta} (\det D)^\beta$

$= (\det P)^2 (\det D)^\beta$

et $\det(\alpha A + \beta B) = (\det P)^2 \det(\alpha I_n + \beta D)$ par factorisation

On veut montrer que

$\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det D)^\beta$

$\iff \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta d_i) \geq \left(\prod_{i=1}^n d_i\right)^\beta$

$\iff \sum_{i=1}^n \ln(\alpha + \beta d_i) \geq \beta \sum_{i=1}^n \ln d_i$ par passage au log

Par concavité du log, $\forall i \in [\![1, n]\!]$

$\ln(\alpha + \beta d_i) \geq \alpha \ln(1) + \beta \ln(d_i) = \beta \ln(d_i)$

d'où $\sum_{i=1}^n \ln(\alpha + \beta d_i) \geq \beta \sum_{i=1}^n \ln(d_i)$ donc c'est vérifié.

Si $A \neq B$, $\exists d_i \neq 1$ donc par stricte concavité du log

on obtient une inégalité stricte.

Comment obtenir le théorème de pseudo-réduction ?

Le théorème spectral dit que si $A \in S_n(\mathbb{R})$ alors

$\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $D = P^{-1} A P$ D diagonale

Or $P^{-1} = {}^tP$, donc A et D sont congruentes.

Ainsi, on peut dire que dans la base de $\mathbb{R}^n$ définie par les colonnes de P, la matrice de la forme quadratique

$q_A : X \mapsto {}^tXAX$ est diagonale.

Cette nouvelle base est à la fois orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et orthogonale pour q_A

Inégalité de Minkowsky. (Tout en un LE p164)

par Cauchy-Schwarz $\varphi(x,y)^2 \leq q(x)\, q(y)$

aussi $\dfrac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2} \leq \sqrt{q(x)q(y)}$ (Polarisation)

donc $q(x+y) \leq q(x) + 2\sqrt{q(x)q(y)} + q(y)$

d'où $\sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$

Démo théorème de pseudo-réduction simultanée.

Soit $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $N \in S_n(\mathbb{R})$

alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tPMP = I_n$

${}^tPNP = D$ (diag)

$M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $\phi(X,Y) \mapsto {}^tXMY$ est 1 produit scalaire de $\mathbb{R}^n$

donc il existe une base orthonormée pour ϕ

ie $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que

${}^tPMP = I_n$

or ${}^tPNP \in S_n(\mathbb{R})$, d'après th spectral $\exists\, Q \in O_n(\mathbb{R})$ tel que

$${}^tQ\, {}^tPNPQ = D$$

on pose $C = PQ$.