Monier MPSI
p97

Eléments d'ordre fini d'un groupe.

Soit $(G,\cdot)$ un groupe de neutre e. Un élément x de G est dit d'ordre fini ssi il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tq $x^n = e$

a) Mq si $x \in G$ est d'ordre fini alors il existe un unique élément de $\mathbb{N}^*$ noté $\omega(x)$ tq $\begin{cases} x^{\omega(x)} = e \\ \forall k \in \mathbb{N}^* \ (k < \omega(x) \Rightarrow x^k \neq e) \end{cases}$

Ainsi $\omega(x)$ est le plus petit entier ≥ 1 tq $x^{\omega(x)} = e$

$\omega(x)$ est appelé ordre de x (dans G)

b) α) Mq si G est fini, tout élément de G est d'ordre fini et $\forall x \in G \ \omega(x) \mid \mathrm{card}(G)$

β) Si tout élément de G est fini, peut-on en déduire que G est fini ?

c) Mq si $x \in G$ est d'ordre fini alors $\{n \in \mathbb{N}^*, x^n = e\} = \omega(x)\mathbb{N}^*$

d) α) Etablir que si deux éléments x et y de G sont d'ordres finis et commutent alors xy est d'ordre fini et

$\omega(xy) \mid \omega(x) \vee \omega(y)$

A-t-on nécessairement $\omega(xy) = \omega(x) \vee \omega(y)$

β) Donner un exemple d'un groupe $(G,\cdot)$ et 2 élts x, y de G d'ordres finis tels que xy ne soit pas d'ordre fini.

Preuve. a) L'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \mid x^n = e\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$, elle admet un plus petit élément noté $\omega(x)$

b) α) G est fini, les éléments x^n $(n \in \mathbb{N})$ ne sont pas deux à deux distincts.

$\exists (k,\ell) \in \mathbb{N}^2$ tq $k < \ell$ et $x^k = x^\ell$

on note $r = \ell - k$, on a $r \in \mathbb{N}^*$ et $x^r = e$

donc x est d'ordre fini.

- soit $p \in \mathbb{N}$, par division euclidienne de p par $\omega(x)$

$\exists (q,r) \in \mathbb{N}^2$ tq $p = \omega(x) q + r$ et $0 \leq r < \omega(x)$

d'où $x^p = x^{\omega(x) q + r} = x^{\omega(x) q} x^r = x^r$

d'après la définition de $\omega(x)$, $e, x, x^2, \dots x^{\omega(x)-1}$ sont 2 à 2 distincts

Ainsi $\langle x \rangle = \{e, x, \dots, x^{\omega(x)-1}\}$

d'après le théorème de Lagrange $\text{card}(\langle x \rangle) \mid \text{card}\, G$

$\omega(x) \mid \text{card}\, G$.

β) Il existe des groupes infinis dont tous les éléments sont d'ordre fini,

par exemple $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X], +)$ groupe additif des polynômes à 1

indéterminée à coeff dans le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

c) même méthode que b) α)

d) α) Notons $\mu = \omega(x) \vee \omega(y)$. Comme $\begin{cases} \omega(x) \mid \mu \\ \omega(y) \mid \mu \end{cases}$

on a $x^\mu = y^\mu = e$

d'où $(xy)^\mu = x^\mu y^\mu = e$ (par commutativité)

donc xy est d'ordre fini et $\omega(x) \mid \omega(x) \vee \omega(y)$

En choisissant $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ $x = y = \bar{1}$ on a $\omega(x) = 2$
$\omega(y) = 2$

$x + y = y + x$ et $\omega(x+y) = 1 \neq \omega(x) \vee \omega(y)$.

donc non.

β) Soit G le groupe des isométries vectorielles du plan (loi: $\circ$)

x, y 2 symétries par rapport à 2 droites vectorielles D et Δ tq

$(\widehat{D, \Delta}) = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $\alpha \notin \pi \mathbb{Q}$.

par ex $\alpha = 1$ (π est irrationnel) ou $\alpha = \pi \sqrt{2}$ ($\sqrt{2}$ irrationnel)