# Chapitre 1

# Dualité

## Sommaire



Dans ce chapitre, $E$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou plus généralement un corps commutatif) de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, sauf mention du contraire. On rappelle que $\mathbb{K}$ lui-même est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1 ; sa base canonique est $(1)$.

$\delta$ désigne le symbole de Kronecker (Léopold Kronecker 1823–1891) :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

En particulier, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base quelconque de $E$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = (\delta_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}.$$

## 1.1 Formes linéaires

**Définition 1.** 1. Une forme linéaire sur $E$ est une application linéaire de $E$ vers $\mathbb{K}$. Usuellement une forme linéaire est désignée par une lettre grecque : $\varphi$ (phi), $\psi$ (psi), $\theta$ (theta)...

2. L'ensemble des formes linéaires sur $E$ s'appelle *l'espace dual* de $E$ (ou plus simplement *le dual* de $E$). On le note $E^*$.

En vertu de la définition, une forme linéaire $\varphi$ est une application de $E$ vers $\mathbb{K}$ qui satisfait

$$\forall u, v \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \varphi(u + \lambda v) = \varphi(u) + \lambda\varphi(v).$$

**Proposition 2.** *$E^*$ est un espace vectoriel pour l'addition des applications et la multiplication par un scalaire. Si $E$ est de dimension finie, $E^*$ l'est aussi et $\dim(E^*) = \dim(E)$. Et donc, dans ce cas, $E^*$ est isomorphe à $E$.*

Nous verrons par la suite (section 1.3) comment trouver des bases de $E^*$ si $E$ est de dimension finie. Remarquons également que, même si $E$ et $E^*$ sont isomorphes, il n'existe pas de manière canonique (c'est-à-dire indépendante de tout choix) de construire un isomorphisme entre $E$ et $E^*$, ceci nécessite d'avoir à disposition d'autres objets (voir le chapitre 2). Le cas où $E$ est de dimension infinie dépasse le cadre de ce cours.

*Preuve de la proposition 2.* On a que $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ donc $E^*$ est muni d'une structure d'espace vectoriel. De plus, si $E$ est de dimension finie,

$$\dim(E^*) = \dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{K})) = \dim(E)\dim(\mathbb{K}) = \dim(E).$$

□

Pour montrer que $E^*$ est un espace vectoriel, on aurait pu également voir que si $\varphi, \psi \in E^*$ sont deux formes linéaires et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire, l'application $\varphi + \lambda\psi$ définie par

$$\forall u \in E, \ (\varphi + \lambda\psi)(u) = \varphi(u) + \lambda\psi(u)$$

est une forme linéaire. L'élément neutre de $E^*$ est *la forme linéaire nulle* $0_{E^*}$ :

$$\forall u \in E, \ 0_{E^*}(u) = 0_{\mathbb{K}}.$$

**Proposition 3.** *Soit $\varphi$ une forme linéaire non nulle sur $E$. Alors $\varphi$ est surjective et* $\dim \mathrm{Ker}\,(\varphi) = n - 1$.

*Démonstration.* Donnons deux preuves de la surjectivité de $\varphi$ :

1. $\mathrm{Im}\,\varphi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$ donc $\mathrm{rg}\,\varphi = \dim \mathrm{Im}\,\varphi = 0$ ou $1$. Si $\mathrm{rg}\,\varphi = 0$, $\mathrm{Im}\,\varphi = \{0_{\mathbb{K}}\}$ donc $\forall u \in E, \varphi(u) = 0$, autrement dit $\varphi = 0_{E^*}$, ce que nous avons exclu dans les hypothèses de la proposition. Donc $\mathrm{rg}\,\varphi = 1$ et $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{K}$, c'est-à-dire $\varphi$ surjective.

2. Puisque $\varphi$ est non-nulle, il existe un vecteur $u \in E$ tel que $x := \varphi(u) \neq 0$. Soit maintenant $y \in \mathbb{K}$, on cherche un vecteur $v \in E$ tel que $\varphi(v) = y$. Or, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, si $v = \lambda u$

$$\varphi(v) = \varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u) = \lambda x.$$

   En choisissant $\lambda = y/x$ (cette opération est permise car $x \neq 0$), on a donc

$$\varphi\left(\frac{y}{x}u\right) = \frac{y}{x}\varphi(u) = \frac{y}{x}x = y.$$

   Ce qui montre que pour tout $y \in \mathbb{K}$, il existe $v \in E$ tel que $y = \varphi(v)$ : $\varphi$ est surjective.

Pour démontrer le second point de la proposition, utilisons le théorème du rang appliqué à $\varphi$ :

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}\,(\varphi) + \mathrm{rg}\,\varphi.$$

Nous avons $\dim E = n$, par définition, et nous avons vu, dans le premier point que $\mathrm{rg}\,\varphi = 1$. Ceci montre que $\dim \mathrm{Ker}\,(\varphi) = n - 1$. □

Donnons maintenant quelques exemples de références :

- Si $E$ est un espace vectoriel quelconque de dimension $n$ et si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E$, on a, par définition

$$\forall u \in E, \ \exists!(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n, \quad u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i.$$

  Soit $\varphi \in E^*$. Comme $\varphi$ est linéaire, on a

$$\varphi(u) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} u_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi(e_i).$$

  Ainsi $\varphi$ est parfaitement déterminée par le n-uplet d'éléments de $\mathbb{K}^n$

$$\varphi(\mathcal{B}) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)),$$

  l'image par $\varphi$ de $\mathcal{B}$ qui n'est autre que la matrice, de format $(1, n)$, de $\varphi$ relativement à la base $\mathcal{B}$ :

$$\varphi(u) = \begin{pmatrix} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \cdots & \varphi(e_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

  c'ést l'écriture matricielle du scalaire $\varphi(u)$.

  Dans le cas particulier où $E = \mathbb{K}^n$ muni de sa base canonique

$$\begin{cases} e_1 = (1, 0, \dots, 0), \\ e_2 = (0, 1, \dots, 0), \\ \vdots \\ e_n = (0, 0, \dots, 1), \end{cases}$$

on a que $\varphi \in E^*$ si et seulement s'il existe $n$ scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\varphi((x_1, \dots, x_n)) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

On a alors, pour tout $i = 1, \dots, n$, $\alpha_i = \varphi(e_i)$ : les $\alpha_i$ sont déterminés de manière unique par $\varphi$. Par exemple,

$$\varphi = 0_{E^*} \Leftrightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (0, \dots, 0).$$

- Si $E = M_n(\mathbb{K})$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille $n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\dim(E) = n^2$. La base canonique de $E$ est la base

$$\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{n1}, E_{n2}, \dots, E_{nn}),$$

formée des matrices élémentaires $E_{kl}$ définies par $E_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, avec $\delta$ le symbole de Kronecker ($E_{kl}$ est la matrice carrée de taille $n$ ayant des zéros partout sauf un 1 à l'intersection de la $k$-ième ligne et de la $l$-ième colonne). L'application *trace*

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \mapsto \operatorname{tr} A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$. En effet, pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\operatorname{tr}(A + \lambda B) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + \lambda b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \lambda \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \operatorname{tr}(A) + \lambda \operatorname{tr}(B).$$

- Soit $E = \mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X], \deg(P) \leqslant n\}$ l'ensemble des polynômes de degré au plus $n$. La base canonique de $E$ est $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$, donc $\dim(E) = \operatorname{Card}(\mathcal{B}) = n + 1$. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, l'application $\delta_x : P \mapsto P(x)$ est une forme linéaire sur $E$ appelée *évaluation en $x$*. Plus généralement, si $x \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}$, on peut définir une forme linéaire sur $E$ par

$$\psi_{x,k} : P \mapsto P^{(k)}(x) \tag{1.1.1}$$

(évaluation de la dérivée $k$-ième de $P$ en $x$). Remarquons que si $k \geqslant n + 1$, $\psi_{x,k} = 0_{E^*}$.

- Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, avec $a$ et $b$ deux réels, $a < b$. C'est un espace vectoriel de dimension infinie. L'application

$$I : f \mapsto \int_a^b f(t) dt$$

est une forme linéaire sur $E$ grâce à la linéarité de l'intégrale. Et, comme précédemment, si $x \in [a, b]$, l'application $\delta_x$ suivante est une forme linéaire : $\delta_x : f \mapsto f(x)$.

## 1.2 Hyperplans

**Définition 4.** On appelle hyperplan de $E$ le noyau d'une forme linéaire non nulle sur $E$ :

$$H \text{ hyperplan de E} \Leftrightarrow \exists \varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}, H = \operatorname{Ker}(\varphi).$$

Par conséquent, un hyperplan $H$ de $E$ est un sous-espace vectoriel de de $E$ de dimension $n - 1$ si $\dim E = n$ (voir la proposition 3).

**Théorème 5.** *Soit $H$ un sous-espace vectoriel de $E$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

*i) $H$ est un hyperplan de $E$,*

*ii) $H$ est un sous-espace vectoriel strict de $E$ et $\forall u \in E \setminus H$, $E = H \oplus \mathbb{K}u$,*

*iii)* $\dim H = n - 1$.

*Démonstration.* • $i \Rightarrow iii$ : Si $H$ est un hyperplan, soit $\varphi \in E^*$ telle que $H = \operatorname{Ker}(\varphi)$. On a vu (voir proposition 3) que $\dim(H) = \dim \operatorname{Ker}(\varphi) = n - 1$.

- *iii* $\Rightarrow$ *ii* : On a $\dim H = n-1 < \dim E$ donc $H$ est un sous-espace vectoriel strict de $E$.

  Soit $u \in E \setminus H$. Posons $F = \mathbb{K}u$. Si $v \in F \cap H$, $v \neq 0$, on a $u = \lambda v$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et, comme $v \in H$, $u = \lambda^{-1} v \in H$, ce qui contredit le choix de $u$. Donc $F \cap H = \{0_E\}$. Par ailleurs, on sait

  $$\dim(F+H) = \dim(F) + \dim(H) - \dim(F \cap H) = 1 + (n-1) - 0 = n$$

  donc $F + H = E$ et, comme $F \cap H = \{0_E\}$, on a $F \oplus H = E$, ce qui est *ii*.

- *ii* $\Rightarrow$ *i* : Soit $u \in E \setminus H$. Soit $\varphi$ l'application de $E$ dans $\mathbb{K}$ définie de la manière suivante : Pour tout $v \in E$, on peut écrire de manière unique $v = v_0 + v_1$ avec $v_0 \in H$ et $v_1 =\in \mathbb{K}u$ donc (de manière unique là encore) $v_1 = \lambda_v u$. On pose alors $\varphi(v) := \lambda_v$. Montrons que $\varphi$ est linéaire. Soient $v, w \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, notons

  $$\begin{cases} v = v_0 + \lambda_v u, \\ w = w_0 + \lambda_w u \end{cases}$$

  leur décomposition dans la somme directe $E = H \oplus \mathbb{K}u$ de sorte que

  $$\varphi(v) = \lambda_v, \varphi(w) = \lambda_w.$$

  On a alors que l'égalité

  $$v + \alpha w = \underbrace{(v_0 + \alpha w_0)}_{\in H} + \underbrace{(\lambda_v + \alpha \lambda_w) u}_{\in \mathbb{K}u}$$

  est la décomposition de $v + \alpha w$ dans la somme directe et, selon la définition de $\varphi$,

  $$\varphi(v + \alpha w) = \lambda_v + \alpha \lambda_w = \varphi(v) + \alpha \varphi(w).$$

  Ce qui montre que $\varphi$ est une forme linéaire. Reste à voir maintenant que $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = H$. Or, si $v \in H$, on a que $v = v + 0\ u$ est la décomposition de $v$ dans la somme directe $E = H \oplus \mathbb{K}u$. Donc $\varphi(v) = \lambda_v = 0$ et $v \in \mathrm{Ker}\,(\varphi)$, ce qui montre que $H \subset \mathrm{Ker}\,(\varphi)$. En particulier, $\dim(\mathrm{Ker}\,(\varphi)) \geqslant \dim(H) = n-1$. Or la décomposition de $u$ dans la somme directe est $u = 0 + 1\ u$ d'où on tire $\varphi(u) = 1$. Donc $\varphi \neq 0_{E^*}$ et $\dim(\mathrm{Ker}\,(\varphi)) = n - 1 = \dim H$. Comme $H \subset \mathrm{Ker}\,(\varphi)$, ceci montre que $H = \mathrm{Ker}\,(\varphi)$, autrement dit $H$ est un hyperplan de $E$.

□

**Théorème 6.** *Soient $\varphi$ et $\psi$ deux formes linéaires sur $E$. On a*

$$(\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \mathrm{Ker}\,(\psi)) \Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \psi = \lambda\varphi).$$

*Démonstration.* Si $\psi = \lambda\varphi$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on a trivialement que $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \mathrm{Ker}\,(\psi)$. Supposons donc que $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \mathrm{Ker}\,(\psi)$. Distinguons deux cas :

- Si $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \mathrm{Ker}\,(\psi) = E$, on a $\varphi = \psi = 0_{E^*}$ et les deux formes sont proportionnelles l'une à l'autre (prendre par exemple $\lambda = 1$).

- Si $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \mathrm{Ker}\,(\psi) = H$ avec $H$ un hyperplan de $E$. Soit $u \in E \setminus H$. On a alors $\varphi(u) \neq 0$ et $\psi(u) \neq 0$. Posons

  $$\lambda = \frac{\psi(u)}{\varphi(u)} \in \mathbb{K}^*.$$

  Montrons que $\psi = \lambda\varphi$. Soit $v \in E$. Notons, comme dans la preuve du théorème précédent $v = v_0 + \alpha u$ la décomposition de $v$ dans la somme directe $E = H \oplus \mathbb{K}u$ ($v_0 \in H$ et $\alpha \in \mathbb{K}$). On a alors

  $$\begin{aligned} \psi(v) &= \psi(v_0) + \alpha\psi(u) && \text{(linéarité de } \psi) \\ &= 0 + \alpha\frac{\psi(u)}{\varphi(u)}\varphi(u) && (v_0 \in \mathrm{Ker}\,(\psi)) \\ &= \lambda\varphi(v_0) + \alpha\lambda\varphi(u) && (v_0 \in \mathrm{Ker}\,(\varphi)) \\ &= \lambda(\varphi(v_0) + \alpha\varphi(u)) \\ &= \lambda\varphi(v_0 + \alpha u) \\ &= \lambda\varphi(v). \end{aligned}$$

  Nous avons donc montré que pour tout $v \in E$ on a $\psi(v) = \lambda\varphi(v)$, autrement dit $\psi = \lambda\varphi$.

□

Remarquons que la preuve nous montre qu'une forme linéaire $\varphi$ (non nulle) est définie connaissant son noyau et la valeur qu'elle prend sur un vecteur $u \in E \setminus \text{Ker }(\varphi)$. Donnons maintenant quelques exemples :

- $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \ x - y + z = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. C'est le plan vectoriel ($\dim H = 3 - 1 = 2$) d'équation $x - y + z = 0$ puisque $\varphi(x,y,z) = x - y + z$ définit une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$. On a
$$H = \{(y-z, y, z), \ (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(1,1,0), (-1,0,1)\}$$
donc une base de $H$ est donnée par $\mathcal{G} = \{(1,1,0), (-1,0,1)\}$ (c'est une famille génératrice minimale car $\text{Card}\,\mathcal{G} = 2 = \dim H$).

  Les vecteurs $u_1 = (2,-1,-3)$ et $u_2 = (1,1,1)$ appartiennent-ils à $H$ ? Il suffit pour cela de calculer $\varphi(u_1)$ et $\varphi(u_2)$ :
$$\begin{aligned} \varphi(u_1) &= 2 - (-1) + (-3) = 0 \quad \text{donc } u_1 \in H, \\ \varphi(u_2) &= 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0 \quad \text{donc } u_2 \notin H. \end{aligned}$$
  Les supplémentaires de $H$ sont les droites vectorielles $\mathbb{R}u_0$ avec $u_0 = (a,b,c) \notin H$, autrement dit tels que $a - b + c \neq 0$.

- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, nous avons noté $\delta_a : P \mapsto P(a)$ la forme linéaire "évaluation en $a$". C'est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{K}_n[X]$ car $\delta_a(1) = 1$. Donc $H_a = \text{Ker }\delta_a$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$.

  La famille $\mathcal{L} = (X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n)$ est une famille de $n$ vecteurs dans $H_a$ linéairement indépendents (car échelonnés par leur degré). C'est une famille libre maximale de $H_a$ donc une base de $H_a$.

**Exercice.** 1. Montrer qu'un hyperplan de $E$ est un sous-espace vectoriel strict de $E$ qui n'est inclus (strictement) dans aucun autre sous-espace vectoriel de $E$ hormis $E$ lui-même.

2. (difficile) Montrer que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ intersecte $GL_n(\mathbb{K})$.

## 1.3 Bases duales

Dans toute cette section $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$.

**Théorème 7** (Base duale). *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note $e_i^*$ la forme linéaire sur $E$ définie par*
$$\forall j \in \{1,\ldots,n\}, e_i^*(e_j) = \delta_{ij} \qquad \textit{(relations d'orthogonalité de Kronecker)},$$
*avec $\delta_{ij}$ le symbole de Kronecker. $e_i^*$ est appelé la* ième forme (linéaire) coordonnée de la base $\mathcal{B}$. *On a*

1. *La famille $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de $E$ appelée* base duale *de $\mathcal{B}$.*
2. *Pour tout $u \in E$,*
$$u = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(u) e_i. \tag{1.3.1}$$
3. *Pour tout $\varphi \in E^*$, $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$.*

Remarquons que le deuxième point justifie l'appellation "forme linéaire coordonnée" pour $e_i^*$ car $e_i^*(u)$ est la coordonnée de $u$ le long du vecteur $e_i$.

*Démonstration.* Nous avons défini les $e_i^*$ sur une base de $E$, nous savons alors qu'il existe une et une seule manière de les définir sur $E$ tout entier par linéarité. Montrons maintenant chacun des trois points.

- La famille des $e_i^*$ est une famille libre. En effet, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ sont tels que
$$\lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_n e_n^* = 0_{E^*},$$
on a, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $0 = \left(\sum_{j=0}^{n} \lambda_j e_j^*\right)(e_i) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j e_j^*(e_i) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \delta_{ji} = \lambda_i$. Donc $\lambda_i = 0$ pour tout $i$, ce qui montre bien que la famille des $e_i^*$ est libre. Comme elle est de rang maximal $n = \dim E^*$, c'est une base de $E^*$.
- Pour tout $u \in E$, notons $u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n$ sa décomposition dans la base $\mathcal{B}$. On a
$$e_i^*(u) = e_i^*(u_1 e_1 + \dots + u_n e_n) = \sum_{j=1}^{n} u_j e_i^*(e_j) = \sum_{j=1}^{n} u_j \delta_{ij} = u_i,$$
ce qui montre que $u = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(u) e_i$.
- Soit $\varphi \in E^*$. En utilisant la formule précédente, on a, pour tout $u \in E$,
$$\varphi(u) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^*(u) e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(u)\varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*(u),$$
d'où on tire $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$.

□

Remarquons ici que pour établir les points 2 et 3, nous n'avons pas utilisé le fait que les $e_i^*$ forment une base de $E^*$. La formule du point 3 montre que les $e_i^*$ forment une famille génératrice de $E^*$.

**Théorème 8** (Base antéduale). *Soit $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de $E^*$. Il existe une unique base $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ de $E$ telle que*
$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \ \varphi_i(f_j) = \delta_{ij}.$$
*Cette base est appelée* antéduale *(ou* préduale*) de la base $\Phi$.*

*Démonstration.* La principale difficulté de cette preuve, par rapport à la preuve de l'existence d'une base duale, est qu'on ne peut pas construire les éléments de $E$ comme on construit une forme linéaire. Il faut donc procéder différemment. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base quelconque de $E$. Nous cherchons des vecteurs $f_1, \dots f_n \in E$ que nous pouvons écrire
$$f_j = \sum_{k=1}^{n} p_{jk} e_k$$
avec $P = (p_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ est la base duale de $\Phi$ si et seulement si, pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$, on a
$$\delta_{ij} = \varphi_i(f_j) = \varphi_i\left(\sum_{k=1}^{n} p_{jk} e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} p_{jk} \varphi_i(e_k).$$
Soit $A$ la matrice définie par
$$A = (a_{ki})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n, \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} \quad a_{ki} = \varphi_i(e_k).$$
L'égalité $\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{jk} \varphi_i(e_k)$ peut s'écrire matriciellement $I_n = PA$. Donc, si on montre que $A$ est inversible, on aura $P = A^{-1}$, ce qui démontrera l'existence et l'unicité de la base antéduale. Soit
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

un vecteur colonne tel que $AX = 0$. On a alors, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$0 = (AX)_k = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(e_k) x_i = \left( \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i \right)(e_k).$$

La forme linéaire $\varphi = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i$ est nulle en chacun des vecteurs $e_1, \dots, e_n$ et ces vecteurs forment une base de $E$, donc $\varphi = 0_{E^*}$ :

$$0_{E^*} = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i.$$

Mais comme les $\varphi_i$ forment une base de $E^*$, on en déduit que tous les $x_i$ sont nuls, i.e. $X = 0$. Nous avons donc montré que le noyau de $A$ est réduit à 0, donc $A$ est inversible. □

Les deux théorèmes précédents montrent qu'il existe une bijection canonique entre les bases de $E$ et celles de $E^*$. Donnons maintenant quelques exemples de calcul de base duale et préduale.

- Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$, posons

$$u_1 = e_1 + e_3, \quad u_2 = e_1 - e_2, \quad u_3 = e_2 - e_3.$$

$\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ : en effet,

$$\det{}_{\mathcal{B}_0} \mathcal{B} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \underset{1}{\cancel{0}} & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Notons $P$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \underset{1}{\cancel{0}} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminons maintenant la base duale $\mathcal{B}^*$ de $\mathcal{B}$ :

$$\mathcal{B}^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*),$$

on doit résoudre $u_i^*(u_j) = \delta_{ij}$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant 3$. Faisons le calcul pour $u_1^*$. Posons $u_1^* = ae_1^* + be_2^* + ce_3^*$. On veut

$$\begin{cases} 1 = u_1^*(u_1) \\ 0 = u_1^*(u_2) \\ 0 = u_1^*(u_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = ae_1^*(u_1) + be_2^*(u_1) + ce_3^*(u_1) \\ 0 = ae_1^*(u_2) + be_2^*(u_2) + ce_3^*(u_2) \\ 0 = ae_1^*(u_3) + be_2^*(u_3) + ce_3^*(u_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a + c \\ 0 = a - b \\ 0 = b - c \end{cases}$$

La solution de ce système est $a = b = c = \dfrac{1}{2}$. Donc $u_1^* = \frac{1}{2}(e_1^* + e_2^* + e_3^*)$. On trouve de même :

$$u_2^* = \frac{1}{2}(e_1^* - e_2^* - e_3^*), \quad u_3^* = \frac{1}{2}(e_1^* + e_2^* - e_3^*).$$

Grâce à ce qui précède, nous pouvons déterminer $P^{-1}$, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_0$. Il faut pour cela connaître les coordonnées de $e_1, e_2, e_3$ dans $\mathcal{B}$. On utilise pour cela la formule (1.3.1) : $e_j = \sum_{i=1}^{3} u_i^*(e_j) u_u$. Donc

$$P^{-1} = (u_i^*(e_j))_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Remarquez que $P^{-1} = {}^tQ$ où $Q$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0^*$ à $\mathcal{B}^*$ (Pourquoi ?).

- Dans $E = \mathbb{K}_n[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2, \dots, X^n)$, on a grâce à la formule de Taylor

$$\forall P \in E, \quad P = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(0)}{i!} X^i \tag{1.3.2}$$

En posant $\forall P \in E,\ \varphi_i(P) := \dfrac{P^{(i)}(0)}{i!}$, on a que $\varphi_i \in E^*$ (on a $\varphi_i = \psi_{0,i}$, voir (1.1.1)) et la formule (1.3.2) s'écrit

$$\forall P \in E,\ P = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(P) X^i,$$

autrement dit, $\varphi_i(P)$ est la coordonnée le long de $X^i$ dans la base $\mathcal{B}_0$ :

$$(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \text{ est la base duale de } \mathcal{B}_0.$$

En particulier, $\mathcal{B}_0$ est une base de $E^*$ et on a $\forall \varphi \in E^*, \varphi = \sum_{i=0}^{n} \varphi(X^i)\varphi_i$.

- Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$, on considère les trois formes linéaires définies par
$$\varphi_0(P) = P(0),\ \varphi_1(P) = P(1), \varphi_2(P) = P(2),$$
c'est-à-dire les évaluations en 0, 1 et 2.

Montrons tout d'abord que $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ est une base de $E^*$. On calcule pour cela

$$\det{}_{\mathcal{B}_0}(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} \varphi_0(1) & \varphi_1(1) & \varphi_2(1) \\ \varphi_0(X) & \varphi_1(X) & \varphi_2(X) \\ \varphi_0(X^2) & \varphi_1(X^2) & \varphi_2(X^2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 \neq 0,$$

donc $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ est une base de $E^*$.

Trouvons maintenant la base antéduale de $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$. On cherche une famille $(P_0, P_1, P_2)$ d'éléments de $E$ telle que $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$ pour $0 \leqslant i, j \leqslant 2$. Faisons le calcul pour $P_0$. Posons $P_0 = a + bX + cX^2$. On doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 1 = \varphi_0(P_0) \\ 0 = \varphi_1(P_0) \\ 0 = \varphi_2(P_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a \\ 0 = a + b + c \\ 0 = a + 2b + 4c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\dfrac{3}{2} \\ c = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Donc

$$P_0 = 1 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}X^2 = \frac{(X-1)(X-2)}{(0-1)(0-2)}.$$

En procédant de même pour $P_1$ et $P_2$, on obtient

$$P_1 = 2X - X^2 = \frac{(X-0)(X-2)}{(1-0)(1-2)}, \quad P_2 = -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2 = \frac{(X-0)(X-1)}{(2-0)(2-1)}.$$

On a ici un exemple simple de *polynômes interpolateurs de Lagrange* pour pour les valeurs 0, 1 et 2. Finalement, déterminons les 3 réels $a, b, c$ tels que

$$\forall P \in E,\ \int_0^2 P(t)dt = aP(0) + bP(1) + cP(2).$$

L'application $\varphi : P \mapsto \int_0^2 P(t)dt$ est une application linéaire sur $E$. Donc (formule (2)), on a

$$\varphi = \varphi(P_0)\varphi_0 + \varphi(P_1)\varphi_1 + \varphi(P_2)\varphi_2.$$

Il nous suffit donc de calculer $\varphi(P_0)$, $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ :

$$\varphi(P_0) = \int_0^2 \left(1 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right)dt = \frac{1}{3},$$
$$\varphi(P_1) = \int_0^2 \left(2t - t^2\right)dt = \frac{4}{3},$$
$$\varphi(P_2) = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right)dt = \frac{1}{3}.$$

On a donc $\varphi = \frac{1}{3}\varphi_0 + \frac{4}{3}\varphi_1 + \frac{1}{3}\varphi_2$, ce qu'on peut écrire sous la forme

$$\forall P \in E, \int_0^2 P(t)dt = \frac{1}{3}P(0) + \frac{4}{3}P(1) + \frac{1}{3}P(2) \qquad \text{(formule des trois niveaux).}$$

## 1.4 (*) Formes linéaires et sous-espaces vectoriels

Nous avons vu dans la section 1.2 le lien entre formes linéaires et hyperplans. Essayons de généraliser cette construction pour inclure tous les sous-espaces vectoriels de $E$.

**Définition 9.** 1. Soit $A$ une partie de $E$. On définit

$$A^\perp := \{\varphi \in E^* | \forall a \in A,\ \varphi(a) = 0\},$$

autrement dit $A^\perp$ est l'ensemble des formes linéaires s'annulant sur tous les éléments de $A$.

2. Soit $B$ une partie de $E^*$. On définit de manière analogue l'ensemble des $u \in E$ sur lesquels tous les éléments de $B$ s'annulent :

$$^\perp B := \{u \in E | \forall \varphi \in B,\ \varphi(u) = 0\}$$

Remarquons ici la notation que nous avons employée : $A^\perp$ est une partie de $E^*$ alors que $^\perp B$ est une partie de $E$, la différence permet ici de savoir si l'on a affaire à un sous-espace de $E$ ou de $E^*$.

*Exemple.* 1. On a $E^\perp = \{0_{E^*}\}$ et $\{0_E\}^\perp = E^*$. De même, $^\perp(E^*) = \{0_E\}$ et $^\perp\{0_{E^*}\} = E$.

2. Si $H = \operatorname{Ker}\varphi$ est un hyperplan de $E$, on a $H^\perp = \mathbb{K}\varphi$, c'est le théorème 6.

Le principal résultat de cette section est contenu dans les deux théorèmes suivants :

**Théorème 10.** *1. Si $A$ et $A'$ sont deux parties de $E$ avec $A \subset A'$, on a $(A')^\perp \subset A^\perp$ (l'application $A \mapsto A^\perp$ renverse l'inclusion).*

*2. Si $A$ est une partie de $E$, $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $E^*$ et $^\perp(A^\perp) = \mathrm{Vect}(A)$. En particulier, si $A$ est un sous-espace vectoriel de $E$, on a $^\perp(A^\perp) = A$.*

*3. Si $A$ est un sous-espace vectoriel de $E$,*

$$n = \dim(A) + \dim(A^\perp).$$

Le deuxième point de ce théorème est important : Si $A$ est un sous-espace vectoriel de $E$, connaître $A$ est équivalent à connaître $A^\perp$ puisque l'un se déduit de l'autre. Les bases de $A^\perp$ (ou plus généralement les familles génératrices) forment des *systèmes d'équations* de $A$.

*Démontration du théorème 10.* 1. Soit $\varphi \in (A')^\perp$ : $\forall u \in A'$, $\varphi(u) = 0$. En particulier, comme $A \subset A'$, on a $\forall u \in A$, $\varphi(u) = 0$, c'est-à-dire $\varphi \in A^\perp$. Ceci montre donc que $(A')^\perp \subset A^\perp$.

2. Soient $\varphi, \psi \in A^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a, pour tout $a \in A$,

$$(\lambda\varphi + \psi)(a) = \lambda\varphi(a) + \psi(a) = \lambda \times 0 + 0 = 0,$$

ce qui montre que $\lambda\varphi + \psi \in A^\perp$ et donc que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $E^*$. Par définition de $A^\perp$, si $a \in A$, on a

$$\forall \varphi \in A^\perp,\ \varphi(a) = 0,$$

ce qui montre que $a \in {^\perp(A^\perp)}$ : $A \subset {^\perp(A^\perp)}$. Comme $^\perp(A^\perp)$ est un sous-espace vectoriel de $E$ (voir théorème 11), nous avons $\mathrm{Vect}(A) \subset {^\perp(A^\perp)}$. Nous devons maintenant montrer l'inclusion réciproque : $^\perp(A^\perp) \subset \mathrm{Vect}(A)$. Nous allons montrer

$$\mathrm{Vect}(A)^c \subset \left({^\perp(A^\perp)}\right)^c.$$

Si $\mathrm{Vect}(A) = E$, il n'y a rien à faire. Sinon, soit $u \in \mathrm{Vect}(A)^c$. Nous devons montrer $u \notin {^\perp(A^\perp)}$, autrement dit

$$\exists \varphi \in A^\perp, \varphi(u) \neq 0$$

(c'est la négation de $\forall \varphi \in A^\perp, \varphi(u) = 0$). Nous cherchons donc une forme linéaire $\varphi \in A^\perp$ (nulle sur $\mathrm{Vect}(A)$) telle que $\varphi(u) \neq 0$. Soit $k = \dim(\mathrm{Vect}(A)) < n$. On se donne $(e_1, \dots, e_k)$ une base de $\mathrm{Vect}(A)$. Posons $e_{k+1} = u$ et complétons la famille libre $(e_1, \dots, e_{k+1})$ en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $E$. Prenons la forme linéaire $\varphi$ définie par

$$\varphi(e_i) = 0 \text{ si } i \neq k+1, \quad \varphi(e_{k+1}) = 1.$$

On a alors $e_1, \dots, e_k \in \operatorname{Ker}(\varphi)$ donc $A = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) \subset \operatorname{Ker}(\varphi)$, ce qui montre $\varphi \in A^\perp$ et $\varphi(u) = \varphi(e_{k+1}) = 1 \neq 0$. Ceci achève la preuve de $x \notin {^\perp(A^\perp)}$.

3. Soit $k = \dim(A)$. Choisissons une base $(e_1, \ldots, e_k)$ de $A$ que nous complétons en une base $(e_1, \ldots, e_n)$. Soit $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale. Posons $B := \mathrm{Vect}(e_1^*, \ldots, e_k^*)$, de sorte que $\dim(B) = k = \dim(A)$. Si $\varphi \in B$, on peut écrire de manière unique
$$\varphi = \lambda_1 e_1^* + \cdots + \lambda_k e_k^*.$$
Donc si $\varphi \in B \cap A^\perp$, on a $\varphi = \lambda_1 e_1^* + \cdots + \lambda_k e_k^*$ et $\varphi(e_1) = \cdots = \varphi(e_k) = 0$. Donc
$$\lambda_1 = \varphi(e_1) = 0, \ldots, \lambda_k = \varphi(e_k) = 0,$$
ce qui montre que $\varphi = 0_{E^*}$ :
$$B \cap A^\perp = \{0_{E^*}\}.$$
Soit maintenant $\psi \in E^*$ quelconque. Il existe des coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\psi = \alpha_1 e_1^* + \cdots + \alpha_n e_n^*$. Posons
$$\psi_B = \alpha_1 e_1^* + \cdots + \alpha_k e_k^*, \quad \psi_{A^\perp} = \alpha_{k+1} e_{k+1}^* + \cdots + \alpha_n e_n^*.$$
On a clairement $\psi_B \in B$. De plus, on voit que $\psi_{A^\perp}(e_1) = \cdots = \psi_{A^\perp}(e_k) = 0$ donc $A \subset \mathrm{Ker}\,(\psi_{A^\perp})$ et $\psi_{A^\perp} \in A^\perp$. Nous avons donc montré que $B + A^\perp = E^*$. Finalement
$$n = \dim(E^*) = \dim(B) + \dim(A^\perp) = \dim(A) + \dim(A^\perp).$$
□

**Théorème 11.** *1. Si $B$ et $B'$ sont deux parties de $E^*$ avec $B \subset B'$, on a ${}^\perp(B') \subset {}^\perp B$ (l'application $B \mapsto {}^\perp B$ renverse l'inclusion).*

*2. Si $B$ est une partie de $E^*$, ${}^\perp B = {}^\perp(\mathrm{Vect}(B))$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et $({}^\perp B)^\perp = \mathrm{Vect}(B)$.*

*3. Si $B$ est un sous-espace vectoriel de $E^*$,*
$$n = \dim(B) + \dim({}^\perp B).$$

La preuve de ce second théorème est similaire à celle du premier. Nous la laissons donc en exercice. L'analogie entre ces deux théorèmes est assez remarquable et illustre la dualité (au sens usuel) entre $E$ et $E^*$. Nous avons vu que $E$ et $E^*$ sont isomorphes, mais pas de manière naturelle. Cependant, nous avons le fait suivant :

**Théorème 12.** *On appelle* bidual *de $E$ le dual de $E^*$ (l'ensemble des formes linéaires sur $E^*$) noté $E^{**}$. Si $u \in E$, on définit une forme linéaire $\Theta_u : E^* \to \mathbb{K}$ par*
$$\Theta_u(\varphi) = \varphi(u).$$
*On a donc $\Theta_u \in E^{**}$ et l'application $u \mapsto \Theta_u$ est linéaire. Si $E$ est de dimension finie, cette application est un isomorphisme entre $E$ et $E^{**}$.*

*Démonstration.* Vérifions que $\Theta_u$ est linéaire. Si $\varphi, \psi \in E^*$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a
$$\Theta_u(\lambda\varphi + \psi) = (\lambda\varphi + \psi)(u) = \lambda\varphi(u) + \psi(u) = \lambda\Theta_u(\varphi) + \Theta_u(\psi),$$
ce qui montre que $\Theta_u$ est une forme linéaire sur $E^*$ : $\Theta_u \in E^{**}$. De plus, si $u, v \in E$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, on a, pour tout $\varphi \in E^*$,
$$\Theta_{\lambda u + v}(\varphi) = \varphi(\lambda u + v) = \lambda\varphi(u) + \varphi(v) = \lambda\Theta_u(\varphi) + \Theta_v(\varphi).$$
Remarquons qu'on a utilisé ici le fait que $\varphi$ est linéaire (!). Nous avons donc montré ($\varphi$ étant quelconque) que $\Theta_{\lambda u+v} = \lambda\Theta_u + \Theta_v$, ce qui montre que $\Theta : u \mapsto \Theta_u$ est linéaire. Ensuite, on a $\dim E^{**} = \dim(E^*) = \dim(E)$, donc pour montrer que $\Theta$ est un isomorphisme, il suffit de montrer que $\Theta$ est injective. Or, si $\Theta_u = 0$ pour un certain $u \in E$, on a $\forall \varphi \in E^*, 0 = \Theta_u(\varphi) = \varphi(u)$, ce qui impose $u = 0$ (on consultera ici la preuve du théorème 10 oÃź l'on montre que pour tout sous-espace $A$ et tout $u \neq 0$ il existe une forme linéaire $\varphi$ nulle sur $A$ et telle que $\varphi(u) \neq 0$, il suffit ici de prendre $A = \{0\}$). $\Theta$ est donc un isomorphisme. □

## 1.5 (*) Formes linéaires et applications

Dans cette section, donnons-nous $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

**Définition 13.** Soit $\Phi \in L(E,F)$ une application linéaire. On appelle *application transposée* l'application linéaire ${}^t\Phi : F^* \to E^*$ définie par ${}^t\Phi(\varphi) = \varphi \circ \Phi$ pour tout $\varphi \in F^*$.

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que ${}^t\Phi$ est bien définie et linéaire.

**Théorème 14.** *Soit $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$) une base de $E$ (resp. de $F$). Notons $\mathcal{B}^*$ (resp. $\mathcal{C}^*$) sa base duale. On a alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}^*,\mathcal{B}^*}({}^t\Phi) = {}^t\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\Phi)\right).$$

*Autrement dit, la matrice de l'application transposée (dans les bases duales) est la transposée de l'application elle-même.*

*Démonstration.* Notons $n = \dim(E)$ et $m = \dim(F)$. Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ les matrices de $\Phi$ et ${}^t\Phi$ :

$$\forall j \in \{1,\dots,n\},\ \Phi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i, \qquad \forall i \in \{1,\dots,m\},\ {}^t\Phi(f_i^*) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} e_j^*.$$

On a $\sum_{j=1}^{n} b_{ji} e_j^* = {}^t\Phi(f_i^*) = f_i^* \circ \Phi$. La formule (1.3.1) peut s'écrire (en enlevant la référence à $u \in E$) $\mathrm{Id}_E = \sum_{j=1}^{n} e_j^*(\cdot) e_j$, d'où

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ji} e_j^* = f_i^* \circ \Phi \circ \mathrm{Id}_E = \sum_{j=1}^{n} e_i^*(\cdot) f_i^*(\Phi(e_j)) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_i^*(\cdot).$$

En identifiant, on trouve donc $b_{ji} = a_{ij}$ pour toute paire $(i,j)$, ce qui montre $B = {}^tA$. □

## 1.6 Exercices

**Exercice 1.** Dans $M_n(\mathbb{K})$, $E_{ij}$ désigne la matrice, dite élémentaire, dont les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de la ligne $i$ et de la colonne $j$ qui vaut 1 : $E_{ij} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant l\leqslant n}}$.

1. Justifier que $\mathcal{B}_0 = (E_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est une base de $M_n(\mathbb{K})$ (c'est sa base canonique). En déduire $\dim(M_n(\mathbb{K}))$.
2. On note $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ (l'espace des matrices colonnes de longueur $n$). Prouver que, pour toute paire $(i,j)$ d'entiers entre 1 et $n$, on a ${}^tE_i.E_i = \delta_{ij}$, et $E_i.{}^tE_j = E_{ij}$.
3. En utilisant la question précédente, montrer que, pour tous $i,j,k,l$ entiers entre 1 et $n$, on a $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.
4. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ dont on note $L_1,\dots,L_n$ les lignes et $C_1,\dots,C_n$ les colonnes. Décrire les matrices $E_{ij}A$ et $AE_{ij}$. En déduire le centre de $M_n(\mathbb{K})$ : $\mathcal{C} := \{A \in M_n(\mathbb{K}),\ \forall M \in M_n(\mathbb{K}), AM = MA\}$.

**Exercice 2.** 1. Définir, à l'aide de quantificateurs, les propriétés suivantes de la matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ :

- $A$ est triangulaire supérieure (resp. inférieure),
- $A$ est diagonale,
- $A$ est scalaire,
- $A$ est symétrique (resp. antisymétrique).

2. Soit $D \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $D$ soit inversible et déterminer alors son inverse.