439

Distance d'un noyau à une forme linéaire.

{ Vo : Monier Analyse R8 1.2.12 p57
{ VB = X-ENS Analyse 3 ex 1.27/28 p 45

Enoncé A (Monier)

Soit E, un evn non réduit à $\{0\}$. $\varphi \in E' \setminus \{0\}$ (forme linéaire)
et $H = \operatorname{Ker} \varphi$.

Mq les assertions suivantes sont 2 à 2 équivalentes.

i) $\exists a \in E : (\|a\| = 1$ et $|||\varphi||| = |\varphi(a)|)$

ii) $\forall x \in E \ \exists h \in H \ d(x, H) = \|x - h\|$

iii) $\exists x \in E \setminus H \ \exists h \in H \ d(x, H) = \|x - h\|$

Preuve - i) $\Rightarrow$ ii)

on suppose qu'il existe $a \in E$ tq $\|a\| = 1$ et $|||\varphi||| = |\varphi(a)|$

H hyperplan et $a \notin H$ car sinon $|||\varphi||| = |\varphi(a)| = 0 \Rightarrow \varphi = 0$
car norme)

$\exists (\lambda, h) \in \mathbb{K} \times H$ tel que $x = \lambda a + h$ (dimension)

on a $\forall k \in H$

$$\begin{cases} |\varphi(x-k)| \leq |||\varphi||| \, \|x-k\| & \text{d'après la définition de la norme} \\ |\varphi(x-k)| = |\varphi(x) - \varphi(k)| = |\varphi(x)| = |\lambda| \, |\varphi(a)| = |\lambda| \, |||\varphi||| \end{cases}$$

d'où $\forall k \in H \quad |\lambda| \leq \|x - k\|$

Mais $\|x - h\| = \|\lambda a\| = |\lambda| \, \|a\| = |\lambda|$

d'où $\forall k \in H \quad \|x - h\| \leq \|x - k\|$

ie $d(x, H) \geq \|x - h\|$

et comme $h \in H$ $d(x, H) = \|x - h\|$

ii) $\Rightarrow$ iii) comme $E \setminus H \neq \emptyset$

c'est évident.

iii) $\Rightarrow$ i) le plus compliqué

on suppose qu'il existe $x \in E \setminus H$ et $h \in H$ tels que

$$d(x, H) = \| x - h \| \quad (hyp)$$

notons $b = x - h$

Soit $u \in E \setminus H$, on a $\frac{\varphi(b)}{\varphi(u)} u - x \in H$

$$\text{car } \varphi\left(\frac{\varphi(b)}{\varphi(u)} u - x\right) = \frac{\varphi(b)}{\varphi(u)} \varphi(u) - \varphi(x) = \varphi(b) - \varphi(x)$$

$$= \varphi(b - x) = -\varphi(h) = 0$$

d'où $\| b \| = \| x - h \| = d(x, H) \leq \| x - \underbrace{\left(\frac{\varphi(b)}{\varphi(u)} u - x\right)}_{\in H} \|$ donc tjrs vrai car h vérifie l'ég

d'où $\| b \| \leq \left\| \frac{\varphi(b)}{\varphi(u)} u \right\| = \left| \frac{\varphi(b)}{\varphi(u)} \right| \| u \|$

donc $\forall u \in E \quad \| b \| |\varphi(u)| \leq |\varphi(b)| \| u \|$

$$\text{donc } |\varphi(u)| \leq \frac{|\varphi(b)|}{\| b \|} \| u \|$$

$$\text{alors } \frac{|\varphi(u)|}{\| u \|} \leq \frac{|\varphi(b)|}{\| b \|}$$

Par passage au sup. $||| \varphi ||| \leq \frac{|\varphi(b)|}{\| b \|}$

Dans l'autre sens, par la norme $|\varphi(b)| = |\varphi(x - h)| \leq ||| \varphi ||| \, \| \underbrace{x - h}_{= b} \|$

$$\text{donc } \frac{\varphi(b)}{\| b \|} \leq ||| \varphi |||$$

$$\text{soit } ||| \varphi ||| = \frac{|\varphi(b)|}{\| b \|}$$

En notant $a = \frac{b}{\|b\|}$ on a $\|a\| = 1$ et $|||\varphi||| = |\varphi(a)|$

X-ENS Analyse 3 exo 1.27 et 1.28 p44.

Caractérisation des formes linéaires continues et norme.

<u>Prop 1</u> Soit E un evn, f forme linéaire non nulle. Mq f est continue ssi son noyau est fermé. Aussi dans le <u>Fresle</u> <u>4.8 p110</u>.

<u>preuve</u> $\Rightarrow$ si f est continue, son noyau est l'image réciproque par f continue du fermé $\{0\}$ donc un fermé.

$\Leftarrow$ supposons noyau fermé et f non continue.

f est linéaire, or si f non continue $\Rightarrow$ f pas bornée sur la sphère unité.

il existe donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E, $\|x_n\| = 1$ $\forall n$ tq $|f(x_n)| > n$.

Soit $u \in E$, posons $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = u - \frac{f(u)}{f(x_n)} x_n$

alors $f(u_n) = f(u) - \frac{f(u)}{f(x_n)} f(x_n) = f(u) - f(u) = 0$

donc $u_n \in \ker f$.

or $\|u - u_n\| = \frac{|f(u)|}{|f(x_n)|} \|x_n\| = \frac{|f(u)|}{|f(x_n)|} \to 0$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv vers u qui est dans $\ker f$ car $\ker f$ est fermé.

or c'est vrai pour tout $u \in E$, donc $f(u) = 0$

or c'est contradictoire avec l'hyp de non continuité

donc f est continue.

Exercice : X.ENS 1.28 Alg 3 p45

E espace vectoriel normé, f forme linéaire continue non nulle sur E.

Soit $x_0 \in E$ tq $f(x_0) \neq 0$

1°/ Mq $|||f||| = \dfrac{|f(x_0)|}{d(x_0, \ker f)}$

2°/ Équivalence $\exists a \in E \setminus \{0\}$ $|||f||| = \dfrac{f(a)}{||a||} \Leftrightarrow \exists b \in \ker f$ $||x_0 - b|| = d(x_0, \ker f)$

3°/ $E = C^0([-1,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de cv uniforme

et $f : x \in E \to \int_0^1 x - \int_{-1}^0 x$

Mq f est linéaire continue et calculer $|||f|||$. Existe-t-il un vecteur a non nul de E tq $|f(a)| = |||f|||\, ||a||$?

Solution : $d(x_0, \ker f) > 0$ car $\ker f$ est fermé et $x_0 \notin \ker f$.

Si $x \in \ker f$, $|f(x_0)| = |f(x_0) - f(x)| \leq |||f|||\, ||x_0 - x||$

Par passage à la borne inf $|f(x_0)| \leq |||f|||\, d(x_0, \ker f)$

Egalité opposée : soit $x \in E$. $E = \mathrm{Vect}(x_0) \oplus \ker f$

d'où $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ et $y \in \ker f$ tq $x = \lambda x_0 + y$

$f(x) = \lambda f(x_0)$

Supposons λ non nul, ie $x \notin \ker f$. alors

$$\frac{||x||}{|\lambda|} = \left\| x_0 + \frac{y}{\lambda} \right\| \geqslant d(x_0, \ker f)$$

par conséquent, $|f(x)| = |\lambda|\,|f(x_0)| \leq \dfrac{||x||\,|f(x_0)|}{d(x_0, \ker f)}$

Cette majoration reste vraie quand $x \in \ker f$.

donc par définition de $|||f|||$, $|||f||| \leq \dfrac{|f(x_0)|}{d(x_0, \ker f)}$

③

2°/ $\Leftarrow$ supposons qu'il existe $b \in \ker f$ tq $\|x_0 - b\| = d(x_0, \ker f)$

posons $a = x_0 - b$

$$f(a) = f(x_0 - b) = f(x_0) - f(b) = f(x_0)$$

et $\|a\| = d(x_0, \ker f)$

donc $\dfrac{|f(a)|}{\|a\|} = \dfrac{|f(x_0)|}{d(x_0, \ker f)} = |||f|||$

Si $f(a) > 0$ alors a convient, sinon prendre $-a$.

$\Rightarrow$ $\exists\, a \in E \setminus \{0\}$ tq $|||f||| = \dfrac{f(a)}{\|a\|}$.

donc $\exists\, \varepsilon \in \{-1, 1\}$ tq $f(a) = |||f|||\ \|a\|$

$$f(a) = \varepsilon \frac{f(x_0)}{d(x_0, \ker f)} \|a\|$$

(ε est en fait le signe de $f(x_0)$)

posons $b = x_0 - \varepsilon \dfrac{d(x_0, \ker f)}{\|a\|} a$

$$f(b) = f(x_0) - \varepsilon \frac{d(x_0, \ker f)}{\|a\|} \times \varepsilon \frac{f(x_0)}{d(x_0, \ker f)} \|a\|$$

$\Rightarrow f(b) = 0$

donc $b \in \ker f$.

et $\|x_0 - b\| = \left\| \varepsilon \dfrac{d(x_0, \ker f)}{\|a\|} a \right\| = d(x_0, \ker f)$

d'où l'équivalence.

3°/ Linéarité de f découle de la linéarité de $\int$.

$$|f(x)| \underset{TI}{\leq} \left| \int_0^1 x \right| + \left| \int_{-1}^0 x \right|$$

$$\leq \int_0^1 |x| + \int_{-1}^1 |x| \leq 2 \|x\|_\infty \quad \forall x \in E$$

donc f est continue et $|||f||| \leq 2$

Montrons l'égalité.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons la fonction $u_n \in E$ affine par morceaux

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{sur } [\frac{1}{n}, 1] \\ -1 & \text{sur } [-1, -\frac{1}{n}] \\ x \mapsto nx & \text{sur } [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \end{cases}$$

On a $\|u_n\|_\infty = 1 \quad \forall n$.

et $f(u_n) = 2 - \frac{1}{n}$, par conséquent $|||f||| = 2$

Montrons maintenant qu'il n'existe aucune fonction non nulle a tq $|f(a)| = 2\|a\|_\infty$

Par l'absurde, supposons que a existe.

par homogénéité $\|a\|_\infty = 1$, comme $|a|$ est continue (par déf)

$$2 = |f(a)| \leq \int_{-1}^{1} |a| \leq 2\|a\|_\infty = 2$$

donc nécessairement $|a| = 1$ sur $[-1, 1]$

donc a est constante, égale à 1 ou -1 et

son image par f est nulle $\Rightarrow$ absurde