Disques de Gershgorin.

X-ENS Alg 2 p72 ex 2.5
Autonomie: RP pour ex et 1ᵉ question

Soit $A = (a_{ij})_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ $\forall i$

1°/ On suppose que $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $|a_{ii}| > R_i$, montrer que A est inversible

2°/ Mq $Sp(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{ z \in \mathbb{C}, |z - a_{ii}| \leq R_i \}$

3°/ On suppose que $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $|a_{ii}| > R_i$, mq $|\det A| \geq \prod_{i=1}^{n} (|a_{ii}| - R_i)$

4°/ $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $a_{ii} > R_i$ mq $\det A \geq \prod_{i=1}^{n} (|a_{ii}| - R_i)$

5°/ Calculer les disques pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2+i & i & -1 \\ 0 & 2 & 3+4i \\ 1+i & 1-i & 5-i \end{pmatrix}$$

Lemme pas utile à montrer au tableau.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il y a équivalence entre

- A est inversible
- $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ $AX = 0 \Rightarrow X = 0$

preuve : $\Rightarrow$ Si A est inversible, $AX = 0$ donc $(A^{-1}A)X = A^{-1}0$
$X = 0$

$\Leftarrow$ Soit A tq $AX = 0 \Rightarrow X = 0$

Soit f l'endo associé canoniquement à A.

alors $\forall x \in E$ $f(x) = 0_E \Rightarrow x = 0_E$

donc $\ker f \subset 0_E$, f est injectif.

En dim finie, f est bijectif d'où f est inversible.

1°/ Raisonnons par l'absurde et supposons A non inversible.

$\exists X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vecteur colonne <u>non nul</u> tq $AX = 0$

Pour tout $1 \leq i \leq n$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$

d'où $\quad a_{ii} x_i + \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j = 0$

$$|a_{ii} x_i| = \left| \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j \right| \underset{IT}{\leq} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| |x_j|$$

$$\leq \max_{1 \leq l \leq n} |x_l| R_i$$

Posons $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tq $|x_{i_0}| = \max_l |x_l|$. On a $|x_{i_0}| > 0$ car $X \neq 0$

d'où $\quad |a_{i_0 i_0}| |x_{i_0}| \leq R_{i_0} |x_{i_0}|$ et $|x_{i_0}| \neq 0$

d'où $|a_{i_0 i_0}| \leq R_{i_0}$. Contraire à l'hypothèse.

donc $A \in GL_n(\mathbb{C})$

2°/ Soit $\lambda \in Sp(A)$. $A - \lambda I_n$ est non inversible par définition.

donc $\exists\, i_0 \in [\![1,n]\!]$, tel que $|a_{i_0 i_0} - \lambda| \leq R_{i_0}$

ie $\lambda \in \{ z \in \mathbb{C},\ |z - a_{i_0 i_0}| \leq R_{i_0} \}$

d'où $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} \{ z \in \mathbb{C},\ |z - a_{ii}| \leq R_i \}$

Rq Les disques de centre a_{ii} et de rayon R_i sont les disques de Gershgorin.

3°/ Soit A' la matrice tel que
$$A' = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{|a_{11}| - R_1} & \cdots & \frac{a_{1n}}{|a_{11}| - R_1} \\ \vdots & & \\ \frac{a_{n1}}{|a_{nn}| - R_n} & \cdots & \frac{a_{nn}}{|a_{nn}| - R_n} \end{pmatrix}$$

On a multiplié chaque ligne par $\frac{1}{|a_{ii}| - R_i}$. (dénominateur non nul d'après hypothèse)

Par linéarité, $\det A = \det A' \prod_{i=1}^{n} (|a_{ii}| - R_i)$

Reste à prouver que $\det A' \geq 1$.

Soit $A' = (a'_{ij})_{ij}$, on a $\forall\, i \in [\![1,n]\!]$

$$|a'_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a'_{ij}| = \left| \frac{a_{ii}}{|a_{ii}| - R_i} \right| - \sum_{j \neq i} \left| \frac{a_{ij}}{|a_{ii}| - R_i} \right|$$

$$= \frac{1}{\left| |a_{ii}| - R_i \right|} \left(|a_{ii}| - R_i \right)$$

$|a_{ii}| > R_i$ donc $\left| |a_{ii}| - R_i \right| = |a_{ii}| - R_i$

$= 1$ ⊛

Pour toute valeur propre λ de A', il existe $1 \leq i \leq n$ tel que

$$|\lambda - a'_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a'_{ij}|$$

Par inégalité triangulaire.

$$\left| |\lambda| - |a'_{ii}| \right| \leq \sum_{j \neq i} |a'_{ij}|$$

soit $-\sum_{j \neq i} |a'_{ij}| \leq |\lambda| - |a'_{ii}|$

et $|\lambda| \geq |a'_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a'_{ij}| = 1$ d'après ⊛

Toutes les valeurs propres de A' ont un module ≥ 1.

D'où le déterminant de A' étant le produit des valeurs propres,

on a $|\det A'| \geq 1$

donc $|\det A| = |\det A'| \underbrace{\left| \prod_{i=1}^{n} (|a_{ii}| - R_i) \right|}_{⊛} \geq \prod_{i=1}^{n} (|a_{ii}| - R_i)$

4°/ D'après 3), on sait uniquement que $\det A > 0$ * $A \in M_n(\mathbb{R})$!

Pour obtenir le résultat, on va utiliser la connexité.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des matrices $(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ tq

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Montrons que $\mathcal{C}$ est convexe. $A = (a_{ij})$ $B = (b_{ij})$ $\in \mathcal{C}^2$

$t \in]0, 1[$, mq $(1-t)A + tB \in \mathcal{C}$

$\forall i \in [\![1, n]\!]$

$$\sum_{j \neq i} |(1-t) a_{ij} + t b_{ij}| \leq \sum_{j \neq i} (1-t) |a_{ij}| + t |b_{ij}|$$

$$\leq (1-t) R_i(a) + t R_i(b)$$

$$\leq (1-t) a_{ii} + t b_{ii}.$$

d'où $(1-t)A + tB \in \mathcal{C}$ convexe donc connexe par arcs.

Or l'application $M \in M_n(\mathbb{R}) \to \det M$ est continue

et d'après la question 1), ne s'annule pas sur $\mathcal{C}$

Son image est un intervalle de $\mathbb{R}$, ne contenant pas 0

donc l'image est contenue, soit dans $\mathbb{R}_+^*$ soit $\mathbb{R}_-^*$

Or $I_n \in \mathcal{C}$ et $\det I_n = 1 > 0$

alors $\forall M \in \mathcal{C}$ $\det M > 0$, avec 3) on obtient le résultat.

5/ $\rho_1 = |i| + |-i| = 2$ $\rho_2 = 5$ et $\rho_3 = 2\sqrt{2}$

on peut affirmer que $sp(A) \subset D_1 \cup D_2 \cup D_3$

union des disques fermés D_1 de centre $2+i$, rayon 2

D_2 de centre 2 et de rayon 5

D_3 de centre $5-i$ et de rayon $2\sqrt{2}$

Rq comme $sp(A) = sp({}^tA)$ $\forall j \in [\![1, n]\!]$ $\rho_j' = \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$

$D_j' = \{ z \in \mathbb{C}, |z - a_{jj}| \leq \rho_j' \}$

on a aussi : $sp(M) \subset \bigcup_{j=1}^{n} D_j'$.