Diagonalisation simultanée

Rouvi 25.12 p 88

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$ev de dim finie n, I un ensemble non vide

$(f_i)_{i \in I}$ famille d'endomorphismes diagonalisables de E, commutant c.à.d

$$\forall (i,j) \in I^2 \quad f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$$

Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices des f_i sont toutes diagonales.

Preuve : • Pour $n=1$, rien à montrer

• Supposons la propriété vraie pour tout $p \in \{1, .. n\}$

Soit E un $\mathbb{K}$ev de dim $n+1$, I ensemble non vide.

$(f_i)_{i \in I}$ famille d'endo diagonalisables de E et commutant c.à.d.

Si $\forall i$ $f_i = \lambda_i Id$, alors pas de pb.

Supposons qu'il existe $i_0 \in I$ tel que f_{i_0} ne soit pas 1 homothétie

Soit $\{\lambda_1, .. \lambda_r\} = Sp(f_{i_0})$ et $E_k = SEP(f_{i_0}, \lambda_k)$ pour $1 \leq k \leq r$.

Comme f_{i_0} n'est pas 1 homothétie, et que f_{i_0} est diago., on

a $\underline{r \geq 2}$

$\forall k \in \{1, .. r\}$ $\quad 1 \leq \dim(E_k) \leq n$

$\Rightarrow$ Soient $i \in I$ et $k \in \{1, .. r\}$, mq E_k est stable par f_i.

Soit $x \in E_k$

$$f_{i_0}(f_i(x)) = (f_{i_0} \circ f_i)(x) = (f_i \circ f_{i_0})(x) = f_i(\lambda_k x) = \lambda_k f_i(x)$$

donc $f_i(x) \in E_k$.

Notons pour $i \in I$, $k \in \{1, .. r\}$ $f_{i,k}$ l'endo induit par f_i sur E_k

$$f_{i,k} = f_i|_{E_k}$$

Soit $k \in \{1, \dots, r\}$

Pour chaque $i \in I$, puisque f_i est diagonalisable, $f_{i,k}$ est diagonalisable.

(En effet, car f_i est diago, il existe 1 polynôme scindé à racines simples $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(f)=0$

Comme $\forall x \in E \quad P(f)(x)=0$ alors $\forall x \in F \quad P(f_{|F})(x) = \underbrace{P(f)(x)}_{=0}$

donc $P(f_{|F})=0$

Comme $f_{|F}$ est annulé par 1 polynôme scindé à racines simples, $f_{|F}$ est diagonalisable)

- les $f_{i,k}$ $(i \in I)$ commutent 2 à 2 puisque les f_i commutent.

on applique l'hyp de récurrence à la famille $(f_{i,k})_{i \in I}$.

Il existe donc une base $\mathcal{B}_k$ de E_k telle que

$$\forall i \in I, \ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_k}(f_{i,k}) \in \mathcal{D}_{\dim(E_k)}(\mathbb{K})$$

Alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$ est une base de E et $\forall i \in I$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_i) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f_{i,1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_r}(f_{i,r}) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_{n}(\mathbb{K})$$