Déterminant de Vandermonde

Soit $x_1, \dots, x_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ $(n \geq 1)$

On note $V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

La $i^{\text{ème}}$ ligne est formée des puissances de x_i^j, $j = 0 \dots n-1$

$V(x_1, \dots, x_n) = 0$ si deux x_i sont égaux.

Si $n = 1$ $V(x_1) = 1$ $n = 2$ $V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$

Prouvons que $\underline{V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)}$

Par récurrence, pour $n=1$ et $n=2$, le résultat est vrai

supposons $n \geq 3$ et la formule vraie pour $n-1$.

i) La formule est vraie si deux x_i $i \neq j$ sont égaux car les deux membres de la formule sont nuls.

ii) Supposons les x_i distincts, considérons

$$V(x_1, \dots, x_{n-1}, X) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & X & & X^{n-1} \end{vmatrix}$$

c'est un polynôme en X, notons le P.

$\forall i \in [\![1, n-1]\!]$ $P(x_i) = V(x_1, \dots, x_{n-1}, x_i) = 0$ (x_i racine de P)

Comme $(x_1, \dots x_{n-1})$ sont distincts, P est multiple de

$$Q := (X - x_1) \dots (X - x_{n-1})$$

On développe le déterminant par rapport à la dernière ligne.

$$P = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} X^{j-1} D_{n,j}$$

Ainsi P est un polynôme de degré au plus $n-1$, le coefficient de X^{n-1} dans P est $D_{n,n}$ qui vaut $V(x_1, \dots x_{n-1})$

l'hypothèse de récurrence donne

$$D_{n,n} = V(x_1, \dots, x_{n-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_j - x_i) \neq 0$$

Ainsi P est de degré exactement $n-1$ comme φ

Or φ est unitaire et $\varphi \mid P$

donc $P = D_{n,n} \varphi$.

Prenons la valeur en x_n, $P(x_n) = \varphi(x_n) D_{n,n} = (x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}) \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_j - x_i)$

$$\text{d'où } P = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

car $P(x_n) = V(x_1, \dots, x_n)$.