Pour leçons :

(DEV)
Nb de dérangements
+ Th des chapeaux

4 méthodes p. mq $D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$:

1. Avec la formule d'inversion de Pascal :
[SKA Alg] ex 1.11 ou [ROM OL] ex 31.2 p: 459 → Th d'inversion de Pascal
→ avec chgt de bases de $\mathbb{R}_n[X]$, syst éq° ⇒ éq° naturelle
→ avec mat inv. de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ à $((1+X)^k)_k$ base de $\mathbb{R}_n[X]$

2. Avec la combinatoire et les permutations ;
p(6) [X ENS Alg 1] ex 1.2 p: 7 → certains passages flous (1 partie identique à M1)

3. Avec la formule du crible [[X ENS Alg 1] ex 1.33]
+ p: ∃ formule pr décompo° D_n : se montre par réc sur n ou avec les f° caractéristiques
→ $U_1, \dots, U_n$ les ens. finis. Alors :
$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subset [\![1,k]\!]} (-1)^{1+\mathrm{Card}\, I} \times \left|\bigcap_{i\in I} U_i\right|$$
→ TEU MPS : p143 (Pb des rencontres) exemple 8 et 9

4. Avec les séries entières : [ROD Ana MP] ex 6.3 p 530 ou [X ENS Alg 1] ex 1.3

App° aux probas : Th des chapeaux [SKA Alg] ex 1.11 (c) ou [ROD Ana] ex 6.3 5).

Q° supp : Mq $D_n = \left[\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}\right]$ ← partie ent., $\forall n \geq 1$. → Bien
[ROM OL] ex 31.2 : 6).

$\boxed{\begin{array}{l} 413 / 438 / 435 / 307 \\ \text{exo } 102 / 356 / 412. \end{array}}$

Pb dérangements $\boxed{\text{B. buelles}}$ ①

k, n $\quad n \geq 1$, $0 \leq k \leq n$ $\quad D_{n,k}$ = le nb de bijections (ou permutations) σ de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ ayant k pts fixes.

$$k = \text{card}\{i \in [\![1,n]\!],\ \sigma(i) = i\}$$

$D_{0,0} = 1$ $\quad d_n = D_{n,0}$ nb de dérangements - permutations sans pt fixe.

1/ Permutations de $\{1,2,3\}$ $\quad (1,2,3) \quad (1,3,2)$

→ 0 pt fixe : $\{2,3,1\}$ / $\{3,1,2\}$ –

~~$\{1,3,2\}$~~ $\quad \{3$

→ 1 pt fixe $\{1,3,2\}$ / $\{3,2,1\}$ / $\{2,1,3\}$ – rg

$(2,3) \quad (1,3) \quad (1,2)$

→ 2 pt fixe Id. – Id

$D_{3,0} = 2 \qquad D_{3,1} = 3, \quad D_{3,2} = 0 \qquad D_{3,3} = 1$

2) $\underline{n!} = \sum_{k=0}^{n} \underline{D_{n,k}}$ $\quad$ A_k l'ensemble de permutations de $[\![1,n]\!]$ avec k pt fixe.

$A_0, \dots A_n$ forment 1 partition de l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$

$$n \times n-1 \dots 1 = \sum_{\ell=0}^{n} \text{Card}(A_\ell) = \sum_{\ell=0}^{n} D_{n,\ell}$$

$n! =$

3) $D_{n,\ell} = \binom{n}{\ell} D_{n-\ell,0}$.

pour chaque permutation A_k, k pts fixes. reste $\underline{n-k}$.

c'est $(n-k)$ / aucun pt fixe

$\binom{n}{\ell}$ choix de ces ℓ pts fixes

4/ $\sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{n!} z^n$ a pour $R \geq 1$

$d_n = D_{n,0}$.

$d_n \leq n!$ car $n! = \sum_{\ell=0}^{n} D_{n,\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} D_{n,\ell} + \underbrace{D_{n,0}}_{d_n}$

d'où si $|z| < 1$ alors $\frac{d_n}{n!}|z|^n < 1$ donc $R \geq 1$

106

5) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$ mq $(\exp x) f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $|x|<1$

$$\exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{abs. cv} - R = +\infty$$

$f(x)$ est abs cv pour $|x|<1$

$$(\exp x)(f(x)) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!} \times \frac{1}{(n-l)!} D_{n-l,0} \right) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{l=0}^{n} \left(\frac{n!}{n!} \times \frac{1}{l!(n-l)!} D_{n,l,0} \right)\right) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} D_{n,l,0} \right) x^n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{l=0}^{n} D_{n,l} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \times n!\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$= \frac{1}{1-x}.$$

6) $d_n = n! \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^l}{l!}$

$\cancel{(1-x)\exp(x) f(x)} = 1$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{(1-x)} e^{-x}}$$

$$\cancel{\sum_{l=0}^{n} \frac{d_{n-l}}{(n-l)!} \times \frac{1}{l!} = \sum_{l=0}^{n} \frac{d_{n,l}}{(l!)}} = 1$$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^l}{l!} \right) x^n$$

d'où $\frac{d_n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{l!}$

7) $p_n = \mathbb{P}(\sigma \in d_n)$. limite $p_n \to +\infty$?

$d_n = n! \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{l!}$

$\cancel{p_n \frac{d_n}{n!}}$. $p_n = \frac{d_n}{n!} = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{l!}$

$$= \exp(-1) = \frac{1}{e}.$$

Rodot p 530 / 6.3

Permutation d'1 ensemble E, toute bijection $: E \to E$.

dérangement : bijection sans pt fixe

$n \in \mathbb{N}^*$, D_n nb de dérangements d'1 ensemble à n élts

$D_0 = 1$.

1°/ Rq $\forall n \in \mathbb{N}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \cdot \frac{D_k}{k!} = 1$

$k \in [\![1, n]\!]$, nb de bijections (ou permutations) est $n!$

$\to$ nb de permutations avec k pts fixes.

$\underset{1}{|} \quad \underset{2}{|} \quad \times \quad \times \quad \times \quad \underset{n}{|}$ $\quad$ $\times$ pt fixe

$\to$ choix $\binom{n}{k}$

et nombre de dérangements pour les autres points D_{n-k}

d'où nb de permut à k pts fixes $\binom{n}{k} D_{n-k}$

$\begin{cases} (S_n) \text{ l'ensemble des permutations de } [\![1, n]\!] \\ F_k \text{ l'ensemble des permutations à } k \text{ pts fixes} \end{cases}$

$\text{card}(S_n) = \text{card}\left(\bigcup_{k=0}^{n} F_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \text{card}(F_k)$ $\quad$ car $F_i \cap F_{i+1} = \emptyset$

(F_k) forme 1 partition de S_n

$= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot D_{n-k}$

$= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} D_{n-k}$ $\quad$ or $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} D_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} D_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{D_k}{k!}$

et $\text{card}(S) = n!$ $\quad$ d'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{D_k}{(n-k)!\, k!} = 1$

2/ $R \geq 1$ pour $\sum \frac{D_n}{n!} z^n$.

$z \in \mathbb{C}$, $\sum \frac{D_n}{n!} z^n$ est abs. cvg. car

$$\left| \frac{D_n}{n!} z^n \right| = \frac{D_n}{n!} |z|^n$$

et $D_n \leq n!$

d'où $\left|\frac{D_n}{n!} z^n\right| \leq |z|^n$ / si $|z|<1 \Rightarrow$ abs cvg.

d'où $R \geq 1$

3/ $z \in D = \{z \in \mathbb{C},\ |z|<1\}$ $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} z^n$

mq $\forall z \in D$ $f(z) = \frac{1}{(1-z)} e^{-z}$

$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ $R = +\infty$.

f a pour rayon de cvg $R' \geq 1$

Sur $R' \geq 1$ $A = e^z \times f(z) = \left(\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}}_{\text{abs cvg}}\right)\left(\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} z^n}_{\text{abs cvg}}\right)$ $\to$ Cauchy.

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \times \frac{D_k}{k!} \right)}_{= a_n} z^n$$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. d'après 1, $a_n = 1$

$A = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ pour $R' \geq 1$ dvpt en série entière de $\frac{1}{1-z}$.

d'où le résultat

4) Rq $D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. pour $n \in \mathbb{N}$

$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} z^n = \frac{1}{1-z} e^{-z} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!}\right)$

AEV AEV.

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^l}{l!} \right) z^n .$$

d'où $a_n = \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^l}{l!}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \frac{D_n}{n!} = \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^l}{l!}$ par déf

$$D_n = n! \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^l}{l!}$$

5°/ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, p_n prop de dérangts parmi les permut. de $[\![1, n]\!]$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad p_n = \frac{D_n}{n!} = \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^l}{l!}$

~~d'où~~ or $\forall z \in \mathbb{C}$ $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ $\quad (R = +\infty)$

pour $z = -1$ $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$

donc $\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{D_n}{n!} = e^{-1} \simeq 36,7\%$

n lettres / n enveloppes → rangt au hasard, proba qu'au moins une lettre soit dans la bonne enveloppe $= 1 - p_n$.

donc $\simeq 63\%$

6°/ Mq $R = 1$, on sait que $R \geq 1$ reste à montrer que $R \leq 1$

$\sum p_n z^n$ est divergente en $z = 1$

$\sum p_n$ diverge car $\lim p_n = e^{-1} \neq 0$

donc $R \leq 1$ et $R = 1$

Rombaldi O2 . ex 31.2 p459 (Rq pas la question 5) Dérangements (1)

$n \geq 2$ $I_n = [\![1, n]\!]$ dérangement de I_n, toute permutation de σ de I_n n'ayant aucun pt fixe

$p \in \mathbb{N}$, δ_p nb de dérangements de I_p $\delta_1 = 0$ et par convention $\delta_0 = 1$

1°/ Si (f_n) et (g_n) sont 2 suites réelles tq

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_k$$

$$\text{on a alors } \forall n \in \mathbb{N} \quad g_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f_k.$$

Inversion de Pascal

2°/ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta_k$

3°/ Mq $\forall n \in \mathbb{N}$ $\delta_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

4°/ n couples, choix de partenaires au hasard.

a) p_n = proba pour que personne ne danse avec son partenaire

b) $\lim_{n \to \infty} p_n$

5°) $\delta_n = E\left(\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}\right)$ $\forall n \geq 1$

Preuve - 1) pour $n = 0$ $f_0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} g_0 = g_0$

pour $n \geq 1$, F et $G \in \mathbb{R}^{n+1}$ $F = \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ et $G = \begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_k \iff F = PG \text{ avec } P = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & & \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

P matrice carrée d'ordre n+1

Pour obtenir $G = P^{-1}F$, il faut pouvoir inverser P !

P est la matrice de Pascal

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, dans $\mathbb{R}_n[X]$

$$(1+X)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X^j . \qquad (1, X, \dots X^n) \text{ base canonique de } \mathbb{R}_n[X]$$

donc en écrivant $P = {}^tQ$ avec $Q = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ & \ddots & & & \vdots \\ & 0 & & & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$

Q est la matrice de passage de la base $(X^\ell)_{0\le \ell \le n}$ base canonique

à la base $\left((1+X)^\ell\right)_{0\le \ell\le n}$.

Q est inversible, d'inverse la matrice de passage de $\left((1+X)^\ell\right)$ à (X^ℓ)

et $X^k = (1+X-1)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1+X)^j (-1)^{k-j}$

donc $Q^{-1} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & -\binom{1}{0} & \cdots & (-1)^n\binom{n}{0} \\ & \ddots & & \vdots \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$

et $P^{-1} = {}^tQ^{-1}$

d'où en réécrivant $G = P^{-1}F$ donnant $g_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f_k$.

2) Même principe que les autres exemples sur les dérangements.

pour $n=0$, $0! = D_0 = 1$

$n \geq 1$ $S_n = \{$ensemble des permutations de $I\}$

$S_{n,k} = \{$permutations de I à k pts fixes$\}$ $\to$ partitions de S_n

$S_n = \bigsqcup_{k=0}^{n} S_{n,k}$ avec $S_{n,n} = \{Id\}$

$S_{n,n-1} = \emptyset$ ($n-1$ pts fixes et 1 dernier tout seul $\to$ pas possible)

donc $\# S_n = \sum_{k=0}^{n} \# S_{n,k}$

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{choix } k \text{ pts}} \overbrace{D_{n-k}}$$

nb de dérangements pour $(n-k)$ points.

d'où le résultat. on a bien $\delta_1 = 0$ / card $S_{1,n-1} = 0$

$\delta_0 = 1$ / card $S_{1,n} = 1$

3/ Avec la formule d'inversion de Pascal.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta_k$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \delta_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k!$

$$\text{donc } \delta_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{\cancel{k!}(n-k)!} \cancel{k!}$$

$$= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$$

4/ Cadre de l'équiprobabilité : nb total de possibilités $n!$

$$p_n = \frac{\delta_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

5/ pour $n \geq 0 \quad e^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$

$$= \frac{\delta_n}{n!} + R_n.$$

R_n est le reste d'une série alternée, donc $|R_n| \leq \frac{1}{(n+1)!}$

$$A = \left| \frac{n!}{e} - \delta_n \right| = \left| \frac{n!}{e} - \frac{\delta_n}{n!} n! \right| = \left| \frac{\delta_n n!}{n!} + n! R_n - \frac{\delta_n n!}{n!} \right| = n! |R_n|$$

$$\leq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

Pour $n \geq 2 \quad A < \frac{1}{2}$

d'où $-\frac{1}{2} < \frac{n!}{e} - \delta_n < \frac{1}{2} \iff \delta_n - \frac{1}{2} < \frac{n!}{e} < \frac{1}{2} + \delta_n$

$$\Rightarrow \delta_n < \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} < \delta_n + 1$$

$$\text{donc } \delta_n = E\left(\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}\right)$$