Dev : Décomposition polaire

Rombaldi Algèbre MP (q1 et q2)
Gourdon p 257
Retravail pour structure

1) Racines carrées dans S_n^+ (3.5.65)

$\forall S \in S_n^+$, $\exists ! R \in S_n^+$ $S = R^2$

On dit que R est la racine carrée de S, on note $R = \sqrt{S} = S^{1/2}$

2) $\forall A \in GL_n(\mathbb{R})$ $\exists ! (\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}$. $A = \Omega S$ (3.5.71)

on dit que $A = \Omega S$ est la décomposition polaire de $A \in GL_n(\mathbb{R})$

3) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $(\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+$ tq $M = \Omega S$ et que S est unique. (3.5.72)

Existence

Preuve : 1) S est symétrique positive, d'après le théorème spectral il existe $(d_1, \dots d_n) \in (\mathbb{R}_+^n)$ et $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ tels que

$D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$

$S = \Omega D \Omega^{-1}$

Soit $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n})$

et $R = \Omega \Delta \Omega^{-1}$

Alors . $R^2 = (\Omega \Delta \Omega^{-1})(\Omega \Delta \Omega^{-1})$

$= \Omega \Delta^2 \Omega^{-1} = S$

symétrique . ${}^tR = {}^t(\Omega \Delta \Omega^{-1}) = {}^t(\Omega^{-1})\, {}^t\Delta\, {}^t\Omega$

$= \Omega \Delta \Omega^{-1} = R$ donc $R \in S_n(\mathbb{R})$

. $R \in S_n^+$ car $R \in S_n(\mathbb{R})$ et $Sp_{\mathbb{R}}(R) \subset \mathbb{R}_+$ (caractérisation)

$R = PDP^{-1}$ $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, D diag.
$Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$
${}^tXRX = {}^t(PX) D (PX) = \sum y_i^2 d_i \geq 0$

2) Unicité.

Soit $R \in S_n^+$ tel que $R^2 = S$

On a $\begin{cases} Sp_{\mathbb{R}}(R) \subset \{\sqrt{\mu}, \mu \in Sp_{\mathbb{R}}(S)\} \\ \forall d \in Sp_{\mathbb{R}}(R) \quad SEP(R, d) \subset SEP(S, d^2) \end{cases}$

car $\lambda \in \mathbb{R}$ $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$RX = \lambda X \Rightarrow SX = R^2X = \lambda RX = \lambda^2 X.$$

et puisque R et S sont diagonalisables

$$\bigoplus_{\lambda \in sp(R)} SEP(R,\lambda) \subset \bigoplus_{\lambda \in sp(R)} SEP(S,\lambda^2) \subset \bigoplus_{\mu \in sp(S)} SEP(S,\mu)$$

et ils coïncident sur les sous-espaces propres.

d'où $\begin{cases} Sp(S) = \{\lambda^2, \lambda \in Sp(R)\} \\ \forall \lambda \in sp(R) \quad SEP(R,\lambda) = SEP(S,\lambda^2) \end{cases}$

$\exists\ \Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in D_n(\mathbb{R})$ telles que

$$S = \Omega D \Omega^{-1}$$

d'après le résultat précédent, il existe $D' \in D_n(\mathbb{R})$ tq

$$R = \Omega D' \Omega^{-1}$$

Comme $R \in S_n^+$, D' est formée des racines carrées des éléments de D, dans l'ordre, d'où l'unicité..

2) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$

Existence :

Comme ${}^tAA \in S_n^{++}$

d'après le lemme de la racine carrée

considérons $S = ({}^tAA)^{1/2} \in S_n^{++}$

posons $\Omega = AS^{-1}$

on a ${}^t\Omega\Omega = {}^t(AS^{-1})AS^{-1} = {}^t(S^{-1}){}^tAAS^{-1} = \underbrace{({}^tS)^{-1}}_{S^{-1}}S^2S^{-1} = I_n$

donc $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$

Unicité :

Soit $(\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}$ tel que $A = \Omega S$

$${}^tAA = {}^t(\Omega S)\Omega S = {}^tS\,{}^t\Omega\Omega S = S\,{}^t\Omega\Omega S = S^2$$

d'où par unicité de la racine carrée de ${}^tAA$ dans S_n^+

$$S = ({}^tAA)^{1/2} \quad \text{puis} \quad \Omega = AS^{-1}$$

3)

Question plus compliquée, il faut d'abord montrer un lemme

__lemme__ : L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles orthogonales est compact dans $M_n(\mathbb{R})$

On munit l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|$ induite par la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Or une transformation orthogonale conserve la norme (isométrie) euclidienne

donc $\forall A \in O_n(\mathbb{R}) \quad \|A\| = 1$

d'où $O_n(\mathbb{R})$ est borné dans $(M_n(\mathbb{R}), \|.\|)$

Cet ensemble est 1 fermé comme image réciproque d'1 fermé $\{I_n\}$ de $M_n(\mathbb{R})$ par l'application continue $A \mapsto {}^tAA$.

$O_n(\mathbb{R})$ est compact en tant que fermé borné.

__lemme 2__ : $Gl_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$ (et c'est un ouvert)

- $Gl_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$ et $\mathbb{K}\setminus\{0\}$ est 1 ouvert de $\mathbb{K}$

  et det est continue (cō fonction polynomiale)

  donc $Gl_n(\mathbb{K})$ est 1 ouvert de $M_n(\mathbb{K})$

- Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$, soit $\chi_A : t \mapsto \det(A - tI_n)$

  n'admet qu'un nombre fini de zéros ($\leq n$) dans $\mathbb{R}$

  $\exists\, t \in]0, \varepsilon[$ tel que $\chi_A(t) \neq 0$ donc $A - tI_n \in Gl_n(\mathbb{R})$

  car : pour que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in Gl_n(\mathbb{R}) \ \|A - B\| < \varepsilon$

  où $B = A - tI_n$ et $\|.\|$ est par exemple $\|.\|_\infty$

  d'où $Gl_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$

- $Gl_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$, il existe une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $Gl_n(\mathbb{R})$

  telle que $M_k \xrightarrow[k\to\infty]{} M$.

d'après 4) $\forall k \in \mathbb{N}$, il existe $(\Omega_k, S_k) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}$ tq

$$M_k = \Omega_k S_k$$

Comme $O_n(\mathbb{R})$ est compact, il existe σ une extraction et $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$

tel que $\Omega_{\sigma(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \Omega$

Alors $S_{\sigma(k)} = \Omega_{\sigma(k)}^{-1} M_{\sigma(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \Omega^{-1} M$

Notons $S = \Omega^{-1} M$ donc $M = \Omega S$

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, \ {}^tS_{\sigma(k)} = {}^tM_{\sigma(k)} \, {}^t\Omega_{\sigma(k)}^{-1} = {}^tM_{\sigma(k)} \Omega_{\sigma(k)} \\ \qquad \to {}^tM \Omega \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ car $\Omega_{\sigma(k)}^{-1} \Omega_{\sigma(k)} = I_n$

$${}^tS_{\sigma(k)} = S_{\sigma(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} S$$

donc $S = {}^tM \Omega = {}^t(\Omega^{-1} M) = {}^tS$ d'où $S \in S_n(\mathbb{R})$

- Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ on a $\forall k \in \mathbb{N}$ ${}^tX S_{\sigma(k)} X \geq 0$

d'où $k \to +\infty$ ${}^tXSX \geq 0$ donc $S \in S_n^+$

Unicité : Si $(\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+$ tq $M = \Omega S$ alors

${}^tMM = {}^t(\Omega S)\Omega S = {}^tS\,{}^t\Omega\,\Omega S = S^2$ donc S est

la racine carrée de ${}^tMM$ dans S_n^+

Application : $(A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$ tq ${}^tAA = {}^tBB$

d'après la décomposition polaire dans $M_n(\mathbb{R})$, il existe

Ω_A et $\Omega_B \in O_n(\mathbb{R})$ $S_A, S_B \in S_n^+$ tq $\begin{cases} A = \Omega_A S_A \\ B = \Omega_B S_B \end{cases}$

Comme ${}^tBB = {}^tAA \Rightarrow S_B^2 = S_A^2$ puis par unicité de la

racine carrée dans S_n^+, $S_B = S_A$ et alors

$A = \Omega B$ où $\Omega = \Omega_A \Omega_B^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$

Lemme : $\forall S \in S_n^+(\mathbb{R})\ \exists!\ R \in S_n^+\ \ R^2 = S$

Monier TP

1) existence

S symétrique → th spectral diago

$\exists (\lambda_1, .. \lambda_n) \in \mathbb{R}_+$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$ tq

$S = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, .. \lambda_n)$

on note $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, .. \sqrt{\lambda_n})$ et $\boxed{R = P\Delta P^{-1}}$

donc $R^2 = (P\Delta P^{-1})(P\Delta P^{-1}) = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = S$

→ R symétrique : ${}^tR = {}^t(P\Delta P^{-1}) = {}^t(P^{-1})\Delta\, {}^tP$ or ${}^tPP = I_n$
$= P\Delta P^{-1} = R$. ${}^tP = P^{-1}$

→ $R \in S_n(\mathbb{R})$ ⊕ $sp(R) \subset \mathbb{R}_+$ donc $R \in S_n^+(\mathbb{R})$

2) Unicité. S/r les endo associés, sym ⊕ $(\lambda_1, .. \lambda_n) \in \mathbb{R}_+$ Gourdon

Soit $E_{\lambda_1}, .. E_{\lambda_n}$ sous-espaces propres de S

r commute avec $r^2 = S$, donc commute avec S

→ chaque E_λ est stable par r.

Diago simultanée $\begin{cases} \text{Notons } r_i = r_{|E_{\lambda_i}}, \text{ on a } r_i^2 = \lambda_i Id_{|E_{\lambda_i}} \\ r_i \text{ sym} ⊕ \end{cases}$

$\forall i$ donc toute vp μ de r_i vérifie $\mu^2 = \lambda_i$

donc $\mu = \sqrt{\lambda_i}$ est la seule vp possible de r_i

(car les vp de r_i, aussi celle de r donc de R sont ⊕)

cō r_i sym $\mathbb{R}$, r_i diago donc $\boxed{r_i = \sqrt{\lambda_i}\, Id_{E_{\lambda_i}}}$

Rmq si $r^2 = S$ alors $r_{|E_{\lambda_i}} = \sqrt{\lambda_i}\, Id_{|E_{\lambda_i}}$

coïncide sur ts les espaces propres → r unique

2) $\forall A \in GL_n(\mathbb{R})\ \exists! (\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $A = \Omega S$

a) Existence de S tq $S \in S_n^{++}$ — Ketrane ⊕ Rouvière

On considère $({}^tAA) \in S_n^{++}$

$$\begin{cases} {}^t({}^tAA) = {}^tAA \to \text{sym.} \\ \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})\ {}^tX({}^tAA)X = ({}^t(AX))AX = \|AX\|^2 \geq 0 \\ \det({}^tAA) = (\det A)^2 \neq 0 \end{cases}$$

donc ok

$S = ({}^tAA)^{1/2} \in S_n^{++}$ et S est unique

b) On a la forme $\Omega = AS^{-1}$, cs S est unique, Ω est unique

* $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$?

${}^t\Omega\Omega = {}^t(AS^{-1})AS^{-1} = {}^t(S^{-1}){}^tAAS^{-1}$

Si S est sym, S^{-1} l'est aussi car

$$\begin{cases} SS^{-1} = I_n \\ {}^t(SS^{-1}) = I_n \\ {}^t(S^{-1}){}^tS = I_n \\ {}^t(S^{-1})S = I_n \\ {}^t(S)^{-1} = S^{-1} \end{cases}$$

${}^t\Omega\Omega = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$. ok

3) On a 2 prop : $O_n(\mathbb{R})$ est compact de $M_n(\mathbb{R})$ a)

$GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$ b)

b) $\exists (M_k)_{k\in\mathbb{N}} \in GL_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tq $M_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} M$ $(M \in M_n(\mathbb{R}))$ densité

d'après 2), $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists (\Omega_k, S_k) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}$

$M_k = \Omega_k S_k$.

compact → $\exists \sigma$ extractrice } compacité

$\Omega_{\sigma(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \Omega$

donc $S_{\sigma(\ell)} = \Omega_{\sigma(\ell)}^{-1} M_{\sigma(\ell)} \to \Omega^{-1} M$ par continuité de $M \mapsto M^{-1}$

notons $S = \Omega^{-1} M$ la limite

a) S symétrique.

$\forall \ell \in \mathbb{N}$ ${}^t S_{\sigma(\ell)} = {}^t\left(\Omega_{\sigma(\ell)}^{-1} M_{\sigma(\ell)}\right) = {}^t M_{\sigma(\ell)} \Omega_{\sigma(\ell)}$ car ${}^t\Omega_\sigma \Omega_\sigma = I_n$

$\to {}^t M \Omega$

donc ${}^t S_{\sigma(\ell)} = S_{\sigma(\ell)} \xrightarrow[\ell \to \infty]{} S$ par continuité

$S = {}^t M \Omega = {}^t(\Omega^{-1} M) = {}^t S$ donc $S \in S_n$

b) $S \in S_n^+$

$X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ $\forall \ell \in \mathbb{N}$ ${}^t X S_{\sigma(\ell)} X \geq 0$

donc $\lim_{\ell \to \infty} {}^t X S_{\sigma(\ell)} X \geq 0$ et $S \in S_n^+$

c) Unicité de S

Si $(\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+$ tq $M = \Omega S$

${}^t M M = {}^t(\Omega S) \Omega S = S^2$ donc S est la racine unique.

y **Lemme** - $\forall S \in S_n^+ \quad \exists!\, R \in S_n^+ \quad S = R^2$

preuve i) existence.

S sym positive, d'après le th spectral.

$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^n)$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$ tq $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$S = PDP^{-1}$$

Notons $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$

et $R = P\Delta P^{-1}$

alors $R^2 = (P\Delta P^{-1})(P\Delta P^{-1}) = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = S$

→ symétrie - ${}^tR = {}^t(P\Delta P^{-1}) = {}^tP^{-1}\, {}^t\Delta\, {}^tP$ car ${}^tP = P^{-1}$ si $P \in O(n)$

$= P\Delta P^{-1}$

$= R$ ok

• $R \in S_n(\mathbb{R})$ et $Sp_{\mathbb{R}}(R) \subset \mathbb{R}_+$ donc $R \in S_n^+$. (caractérisation)

ii) unicité. notons s et r les endo de $\mathbb{R}^n$ dt le représentant canonique sont S et R — Gourdon p208

$s \in S_n^+$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$

Notons $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_n}$ ses espaces propres de s

r commute avec r^2 donc commute avec s

chaque E_λ est stable par r.

(diagonalisation simultanée) Notons $r_i = r|_{E_{\lambda_i}}$, on a $r_i^2 = \lambda_i \mathrm{Id}_{E_{\lambda_i}}$

et r_i est symétrique positif

(base commune de diagonalisation) donc toute valeur propre μ de r_i vérifie $\mu^2 = \lambda_i$

donc $\mu = \sqrt{\lambda_i}$ est la seule vp positive de r_i

(car les vp de r_i, qui sont aussi vp de r donc de R sont positives)

~~or~~ r_i est diagonalisable (car sym $\mathbb{R}$) alors

comme $\boxed{r_i = \sqrt{\lambda_i}\, \mathrm{Id}_{E_{\lambda_i}}}$

Si $r^2 = S$ alors $\forall i$ $r_{|E_i} = \sqrt{\lambda_i}\, Id_{|E_i}$ donc r est unique.

d'où unicité de R.

($SEP(R,\lambda) \subset SEP(S,\lambda^2)$ car $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

$RX = \lambda X \Rightarrow SX = R^2 X = \lambda^2 X$)

Autre démo

ou $R \in S^+$ tq $R^2 = S$

$\begin{cases} Sp(R) \subset \{\sqrt{\mu},\ \mu \in Sp(S)\} \\ \forall \lambda \in Sp(R)\quad SEP(R,\lambda) \subset SEP(S,\lambda^2) \end{cases}$

R et S diago, $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(R)} SEP(R,\lambda) \subset \bigoplus_{\lambda \in Sp(R)} SEP(S,\lambda^2)$

$\subset \bigoplus_{\mu \in Sp(R)} SEP(S,\mu) = E$

d'où $\begin{cases} Sp(S) = \{\lambda^2,\ \lambda \in Sp(R)\} \\ \forall \lambda \in Sp(R)\quad SEP(R,\lambda) = SEP(S,\lambda^2) \end{cases}$

$\exists\, \Omega \in O_n(\mathbb{R}),\ D \in D_n(\mathbb{R})$ tq $S = \Omega D \Omega^{-1}$

d'après ce qui précède, $D' \in D_n(\mathbb{R})$ tq $R = \Omega D' \Omega^{-1}$

comme $R \in S_n^+$, D' est formée des racines des valeurs des dans l'ordre d'où l'unicité.

2) $\forall A \in GL_n(\mathbb{R})$ $\exists!\, (\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}$, $A = \Omega S$

Soit $A \in GL(\mathbb{R})$

<u>Existence</u> ${}^tAA \in S_n^{++}$

car $\begin{cases} {}^t({}^tAA) = {}^tAA \\ \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})\quad {}^tX({}^tAA)X = {}^t(AX)\, AX = \|AX\|^2 \geq 0 \\ \det({}^tAA) = (\det A)^2 \neq 0 \end{cases}$

donc d'après le lemme précédent.

$S = ({}^tAA)^{1/2} \in S_n^{++}$ / S est unique.

posons $\Omega = AS^{-1}$.

$${}^t\Omega\Omega = {}^t(AS^{-1})AS^{-1} = {}^t(S^{-1})\,{}^tAA\,S^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1}$$

$$= S^{-1}S^2S^{-1} = I_n.$$

donc $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$.

(Rq : S^{-1} est symétrique positive définie)

$SS^{-1} = I_n$

${}^t(SS^{-1}) = I_n$

${}^t(S^{-1})\,{}^tS = I_n$

${}^t(S^{-1})\,S = I_n$

${}^t(S^{-1}) = S^{-1}$

<u>Unicité</u>. Soit $(\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}$ tq $A = \Omega S$

$${}^tAA = {}^t(\Omega S)\,\Omega S = {}^tS\,{}^t\Omega\,\Omega S = S I_n S = S^2$$

par unicité de la racine on a le <u>résultat</u>.

3) $O_n(\mathbb{R})$ est compact de $M_n(\mathbb{R})$

$GL_n(\mathbb{R})$ dense de $M_n(\mathbb{R})$

• $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$, ...

$\exists (M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $GL_n(\mathbb{R})$ tq $M_k \xrightarrow[k\to\infty]{} M$

d'après 2), $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists (\Omega_k, S_k) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}$

$M_k = \Omega_k S_k$

comme $O_n(\mathbb{R})$ compact, $\exists\, \sigma$ extractrice tq

$\Omega_{\sigma(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \Omega$

Alors $S_{\sigma(k)} = \Omega_{\sigma(k)}^{-1} M_{\sigma(k)} \longrightarrow \Omega^{-1}M$.   par continuité de $M \mapsto M^{-1}$

Notons $S = \Omega^{-1}M$.

- S est symétrique

$$\forall \ell \in \mathbb{N} \quad {}^tS_{\sigma(\ell)} = {}^tM_{\sigma(\ell)}\,{}^t\Omega^{-1}_{\sigma(\ell)} = {}^tM_{\sigma(\ell)}\,\Omega_{\sigma(\ell)}$$

$$\to {}^tM\,\Omega \qquad \text{car } \Omega^{-1}_{\sigma(\ell)}\Omega_{\sigma(\ell)} = I_n$$

donc ${}^tS_{\sigma(\ell)} = S_{\sigma(\ell)} \to S$

donc $S = {}^tM\,\Omega = {}^t(\Omega^{-1}M) = {}^tS$ d'où S est symétrique

- $S \in S_n^+$ (*)

$X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \forall \ell \in \mathbb{N} \quad {}^tX S_{\sigma(\ell)} X \geq 0$

$\lim\limits_{\ell \to \infty} {}^tX S_{\sigma(\ell)} X \geq 0$ donc $S \in S_n^+$

- Unicité de S

Si $(\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+$ tq $M = \Omega S$

alors ${}^tM M = {}^t(\Omega S)\,\Omega S = S^2$ donc S est la racine carrée de ${}^tM M$ dans S_n^+ $\to$ unicité

(*) c'est ici que l'on perd le défini (+)

$S_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \; {}^tA = A$ et ${}^tXAX \geq 0\}$ est fermé

$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

$M \mapsto {}^tXMX$ est continue de l'ensemble positive.

pour définie car S_n^{++} n'est pas fermé !