Dev : Décomposition de Dunford.

{ Gourdon p 203/204 ①
{ Grifone p 188

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f de f soit scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ avec d diagonalisable et n nilpotente tels que i) $f = d + n$

ii) $n \circ d = d \circ n$

Preuve : le polynôme caractéristique s'écrit $\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$

on note $N_i = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}$ les sous-espaces caractéristiques

Existence : $E = \bigoplus_{k=1}^{p} N_k$

on définit d et n sur chaque N_k

$$\forall x \in N_k \quad \begin{cases} d(x) = \lambda_k x \\ n(x) = f(x) - d(x) \end{cases}$$

N_k est stable par f car f commute avec $(f - \lambda Id)^{\alpha_k}$

donc d et n sont bien définis. ! polynôme en f donc commute avec f

$$\forall k \quad \begin{cases} d_k = d_{|N_k} = \lambda_k Id_{N_k} \\ n_k = n_{|N_k} = f_{|N_k} - \lambda_k Id_{N_k} \end{cases}$$

Les d_k et n_k sont des endomorphismes de N_k car N_k est stable par f donc par n et d.

② Montrons qu'ils conviennent.

- d est diagonalisable par construction $(d_{|N_k} = \lambda_k Id)$
- n est nilpotent, par définition de N_k

$$\forall x \in N_k \quad (f - \lambda_k Id)^{\alpha_k}(x) = 0$$

$$\text{donc } n^{\alpha_k}(x) = 0$$

Soit $\alpha = \max_k \alpha_k$ alors n^α s'annule sur tous les N_k $\forall k$

u

donc s'annule sur $E = \bigoplus_{k=1}^{p} N_k$ d'où $n^\alpha = 0$

③ d et n commutent ?

sur chaque N_k, $d_k = \lambda_k Id_{N_k}$

donc $n_k \circ d_k = d_k \circ n_k$

d et n commutent sur chaque N_k et comme $E = \bigoplus_{k=1}^{p} N_k$

ils commutent sur E.

$\Rightarrow$ existence OK.

<u>Unicité</u> Soit (d', n') un autre couple vérifiant les mêmes conditions.

$f = d + n = d' + n'$

d' commute avec n' et d' (lui-même) donc d' commute avec f.

$f \circ d' = d' \circ f$

Chaque N_k est stable par d' par construction :

$\forall x \in N_k \quad (f - \lambda_k Id)^{\alpha_k}(d'(x)) = d' \circ (f - \lambda_k Id)^{\alpha_k}(x) = 0$

donc $d'_{|N_k}$ est bien défini et $d_{|N_k} = \lambda_k Id_{N_k}$

alors $d' \circ d_{|N_k} = d_{|N_k} \circ d'$ ($d_{|N_k}$ et d' commutent)

or $\bigoplus_{k=1}^{p} N_k = E$ alors $\underline{d' \circ d = d \circ d'}$

De plus d et d' sont diagonalisables, ils commutent

$\Rightarrow$ on peut les diagonaliser dans la même base

$d - d'$ est diagonalisable

Or $d - d' = n' - n \Rightarrow n' - n$ est diagonalisable.

<u>Et</u> $n = f - d$ et $n' = f - d'$ et car $d \circ d' = d' \circ d$

alors n et n' commutent

Comme la première fois, f et n commutent et on applique la transitivité

On sait qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^2$ tel que $n^p = n'^q = 0$

$$(n - n')^{p+q} = \sum_{i+j = p+q} \binom{p+q}{i} n^i (-1)^j n'^j = 0$$

(chaque terme de la somme est nul à cause des puissances)

donc $n - n'$ est nilpotent

Or $d - d'$ est diagonal (d'où $n - n'$ aussi) $\Big\} \Rightarrow \begin{cases} d = d' \\ n = n' \end{cases}$

d'où l'unicité.

Remarque : pourquoi $u_{|N_k}$ et $v_{|N_k}$ commutent alors ils commutent sur E

$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} N_k$$

Soit $x \in E$ alors $x = \sum_{k=1}^{p} x_k$

$$u \circ v(x) = \sum_{k=1}^{p} u \circ v(x_k) = \sum_{k=1}^{p} v \circ u(x_k) = v \circ u(x)$$

Autre méthode. Avec les polynômes.

On montre que d et n sont des polynômes en f.

Lemme : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $F \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de f

Soit $F = \beta P_1^{\alpha_1} \dots P_s^{\alpha_s}$ la décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ du polynôme F. On note $N_i = \operatorname{Ker} P_i^{\alpha_i}(f)$ $\forall i$

On a alors $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_s$ et $\forall i$, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{i \neq j} N_j$ est un polynôme en f.

Preuve : Par le théorème des noyaux $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_s$

$\forall i$, notons $Q_i = \prod_{i \neq j} P_j^{\alpha_j}$.

Aucun facteur n'est commun à tous les Q_i

Donc les Q_i sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Avec le théorème de Bezout. $\exists\, U_1, \dots U_s \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$U_1 Q_1 + \dots + U_s Q_s = 1$$

d'où avec l'endomorphisme f

$$Id_E = U_1(f)\circ Q_1(f) + \dots + U_s(f)\circ Q_s(f)$$

$\forall i$, notons $P_i = U_i Q_i$ et $p_i = P_i(f)$

d'où $Id = \sum_{i=1}^{s} p_i$ (*)

Par ailleurs $\forall i \neq j$, $F \mid Q_i Q_j$ donc

$\to \prod_{j\neq i} \Pi_j^{\alpha_j} \times \prod_{i \neq j} \Pi_i^{\alpha_i} = \mathbb{K}[X]\, F$ or $F(f) = 0$

$$\forall j \neq i \quad p_i \circ p_j = \underbrace{Q_i Q_j(f)}_{\text{multiple de } F} \circ\, U_i U_j(f) = 0$$

De $Id = \sum_{i=1}^{s} p_i \Rightarrow p_j = \sum_{i=1}^{s} p_i \circ p_j = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{s} p_i \circ p_j + p_j^2 = 0 + p_j^2$

$p_j = p_j^2$ donc les (p_i) sont des projecteurs.

On va définir le projecteur via son image et son noyau

N_i $\qquad \bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} N_j = E$

- Montrons que $\forall i$ $\mathrm{Im}\, p_i = N_i$:

soit $y = p_i(x) \in \mathrm{Im}\, p_i$

$$\Pi_i^{\alpha_i}(f)(y) = \Pi_i^{\alpha_i}(f) \circ P_i(f)(x) =$$
$$= \Pi_i^{\alpha_i}(f) \circ U_i(f) \circ Q_i(f)$$
$$= \Pi_i^{\alpha_i}(f) \circ Q_i(f) \circ U_i(f)$$
$$= F(f) \circ U_i(f) = U_i(f) \circ F(f) = 0$$

donc $\mathrm{Im}\, p_i \subset \mathrm{Ker}\, \Pi_i^{\alpha_i}(f) = N_i$

Inclusion réciproque : soit $x \in \mathrm{Ker}\, \Pi_i^{\alpha_i}(f) = N_i$

Comme $Id = \sum_{i=1}^{s} p_i$ d'après (*)

$$x = p_1(x) + \dots + p_s(x)$$

Or $\forall j\neq i$ $\quad p_j(x) = U_j(f)\circ Q_j(f)(x) = 0$ car $\Pi_i^{\alpha_i} \mid Q_j$

car $Q_j = \prod_{i\neq j} \Pi_i^{\alpha_i}$ facteur commun

donc finalement $x = p_i(x) \in \mathrm{Im}\, p_i$

$N_i \subset \mathrm{Im}\, p_i$

donc $\mathrm{Im}\, p_i = N_i$

$\left(\Pi_i^{\alpha_i} \nmid Q_i\right.$ mais $\Pi_i^{\alpha_i} \mid Q_j$ $j\neq i$

Reste à montrer que $\forall i$ $\mathrm{Ker}\, p_i = \bigoplus_{i\neq j} N_j$

$\forall j\neq i$ $\quad N_j \subset \mathrm{Ker}\, p_i$ car si $x\in N_j$ $\quad p_i(x) = U_i(f)\circ Q_i(f)(x) = 0$

car $\Pi_j^{\alpha_j} \mid Q_j$

→ ce c'est vrai $\forall j\neq i$

donc $\bigoplus_{j\neq i} N_j \subset \mathrm{Ker}\, p_i$

Soit $x\in \mathrm{Ker}\, p_i$. $\quad Id = \sum_{i=1}^{s} p_i$

$x = \sum_{j\neq i} p_j(x)$ donc $x \in \bigoplus_{j\neq i} N_j$

→ $\mathrm{Ker}\, p_i \subset \bigoplus_{j\neq i} N_i$

donc $\mathrm{Ker}\, p_i = \bigoplus_{j\neq i} N_j$

Par construction, les projecteurs p_i sont des polynômes en f.

Décomposition de Dunford.

$\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ et $\forall i$ $N_i = \mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i Id)^{\alpha_i}$

On applique la prop précédente pour $F = \chi_f$ et $\forall i$ $\Pi_i = (X-\lambda_i)$

avec les notations précédentes $\forall i$ $p_i = P_i(f)$ est le projecteur sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} N_j$

On pose $d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i$ (donc d est diagonalisable)

$n = f - d = \sum_{i=1}^{s} (f-\lambda_i Id)\, p_i$

Comme les p_i sont des projecteurs $p_i\circ p_j = 0$ si $i\neq j$

et p_i commutent avec f (car polynôme en f)

par récurrence sur q

$$\forall q \in \mathbb{N}^* \quad n^q = \sum_{i=1}^{s} (f - \lambda_i Id)^q p_i$$

Si $q = \sup_i \alpha_i$, on a $(f - \lambda_i Id)^q p_i = [(X - \lambda_i)^q P_i](f) = 0 \ \forall i$

car $P_f(\chi_f) \mid (X - \lambda_i)^q P_i$

donc $n^q = 0$

donc d et n sont des polynômes en f.

<u>Unicité</u> : (d', n') un second couple.

d' et n' commutent avec $d' + n' = f$, donc avec d et n qui sont des polynômes en f.

D'où d et d' sont diagonalisables dans la même base $\Rightarrow d - d'$ diagonalisable

$d - d' = n' - n$ est nilpotente (cf précédemment)

$d - d' = n' - n = 0$