Fresla ex 2.13 p63 ①
Delaunay ex 38 p239
Gourdon p203 et suivants
⊕ calcul expo fu ex 1 p209

Décomposition de Dunford. NEW

Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe un unique couple $(d,n) \in \mathcal{L}(E)^2$ avec d diagonalisable et n nilpotente telles que

1) $f = d + n$
2) $d \circ n = n \circ d$.

Méthode 1 : version directe en passant par les espaces caractéristiques.

1) Existence. (construction de n et d) | Gourdon Fresla

$\chi_f = (-1)^n \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ avec λ_k valeur propre de f et α_k son ordre de multiplicité.

(on peut l'écrire comme cela car il est scindé)

D'après le théorème des noyaux :

$$\operatorname{Ker} \chi_f(f) = \bigoplus_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}\left((f - \lambda_k Id)^{\alpha_k}\right)$$

Notons N_k l'espace caractéristique associé à λ_k

Or $\forall x \in E$ $\operatorname{Ker}(\chi_f(f)) = E$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton car $\chi_f(f) = 0$ donc $\operatorname{Ker}(\chi_f(f)) = E$.

On définit d et n sur chaque N_k

Notons également $f_k = f_{|N_k}$, $d_k = d_{|N_k}$ et $n = n_{|N_k}$

posons $\forall k$ $\forall x \in N_k$ $d_k(x) = \lambda_k x$ et $n_k(x) = f(x) - \lambda_k x$

1°/ d_k et n_k sont des endomorphismes de N_k

car N_k est stable par f donc par n_k et d_k.

Ainsi défini, d_k est diagonalisable et $\forall k$ $n_k = (f - \lambda_k Id)^{\alpha_k}$

$$= (f_k - \lambda_k Id)^{\alpha_k}$$
$$= 0$$

donc $f_k - \lambda_k Id = n_k$ est nilpotent.

Dans la base $\mathcal{B}_k$ de E_k, on a donc $f_k = \lambda_k Id + n_k$

soit $f_k = d_k + n_k$ avec $n_k^{\alpha_k} = 0$

Fusion | En concaténant les bases $\mathcal{B}_k$ de façon à former une base $\mathcal{B}$ de E

on obtient que $f = d + n$ avec $\begin{cases} d \text{ constitué des } d_k \\ n \text{ — des } n_k \end{cases}$

* d est diagonale, donc diagonalisable
* n est nilpotent car $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\forall x \in N_k$

$n_k^{\alpha_k}(x) = 0$ par construction

en prenant $\alpha = \max\limits_k \alpha_k$, alors $n^\alpha = 0$, nilpotent d'indice α.

et d et n commutent pour terminer.

$\forall k$ $d_k = \lambda_k Id_{N_k}$ donc $n_k \circ d_k = d_k \circ n_k$, ie d_k et n_k

commutent sur chaque N_k, donc sur $E = \bigoplus\limits_{k=1}^{p} N_k$

2) Unicité Plus compliqué (Gourdon)

Soit (d', n') un autre couple tq d' diagonalisable

n' nilpotente et $n' \circ d' = d' \circ n'$

On a $f = d + n = d' + n'$

d' commute avec n', donc commute par somme avec f.

cad $f \circ d' = d' \circ f$.

chaque N_k est stable par d' par construction.

car $\forall x \in N_k$ $(f - \lambda_k Id)^{\alpha_k} \circ d'(x) = \underbrace{d' \circ (f - \lambda_k Id)^{\alpha_k}(x)}_{d' \text{ commute avec } P(f)} = 0$

②

Or $d_{|N_k} = \lambda_k \, Id_{N_k}$ on a $d' \circ d_{|N_k} = d_{|N_k} \circ d'$

or $E = \bigoplus_{k=1}^{p} N_k$ alors $d' \circ d = d \circ d'$.

On utilise la diagonalisation simultanée.

d et d' sont diagonalisables et ils commutent.

$\Rightarrow$ on peut les diagonaliser dans une même base

donc $d' - d$ est diagonalisable.

or $d' - d = n - n'$ $\Rightarrow$ $n - n'$ est diagonalisable.

Et $n = f - d$ et $n' = f - d'$. comme d et d' commutent

alors n et n' commutent. (transitivité)

On sait qu'il existe $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tq $n^p = n'^q = 0$ (nilpotent)

Calculons

$$(n - n')^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} n^k (-n')^{p+q-k}$$

on découpe la somme en deux parties :

- soit $k \leq p$ alors $p+q-k \geq q$ donc $n'^q = 0$
- soit $k \geq p$ alors $n^k = 0$

donc $(n - n')^{p+q} = 0 \Rightarrow (n - n')$ est nilpotente et diagonalisable.

donc $n - n' = 0$

et $n = n'$

$\Rightarrow d = d'$ d'où l'unicité.

Remarque et question : $E = \bigoplus_{k=1}^{p} N_k$, $u_{|N_k}$ et $v_{|N_k}$ commutent sur N_k

mq ils commutent sur E.

Soit $x \in E$ $x = \sum_{k=1}^{p} x_k$ avec $x_k \in N_k$

$$u \circ v(x) = \sum_{k=1}^{p} u \circ v(x_k) = \sum_{k=1}^{p} v \circ u(x_k) = v \circ u(x).$$

Variante en utilisant des polynômes pour montrer que les projecteurs spectraux sont des polynômes en u.

→ Gourdon lemme ... p 204 / 1e feuille

→ Delaunay RP Alg. p 241

Rappel – $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E ev de dim finie. dont le polynôme caractéristique est scindé.

Existence et unicité $(d,n) \in \mathcal{L}(E)$ avec d diagonalisable et n nilpotent. $\begin{cases} u = d + n \\ d \circ n = n \circ d \end{cases}$

On note $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ les valeurs propres, dont l'ordre de multiplicité est $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

a) Justifier que $E = \bigoplus_{k=1}^{m} \mathrm{Ker}(u - \lambda_k Id_E)^{\alpha_k}$

Soit p_k projecteur sur $\mathrm{Ker}(u - \lambda_k Id_E)^{\alpha_k}$ // $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \mathrm{Ker}(u - \lambda_j Id_E)^{\alpha_j}$

sont des polynômes en u.

b) $d = \lambda_1 p_1 + \ldots \lambda_m p_m$ et $n = u - d$. Vérifier que (d,n) est solution.

c) Etablir l'unicité.

a) le polynôme caractéristique s'écrit $\chi_u = \prod_{k=1}^{m} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$

Par le th de Cayley-Hamilton, $\chi_u(u) = 0$ (χ_u est annulateur de u) et les facteurs $(X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ sont 2 à 2 premiers entre eux car ils n'ont aucun facteur communs ($\lambda_i \neq \lambda_j$ $j \neq i$)

Lemme des noyaux : décomposition en somme directe :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{m} F_k \quad \text{avec } F_k = Ker(u-\lambda_k Id_E)^{\alpha_k}$$

$$H \left(\begin{array}{l} Ker(\chi_u(u)) = \bigoplus Ker(\quad) \\ Ker(\{0\}) = E \\ \text{donc } E = \bigoplus Ker \ldots \end{array} \right.$$

Etudions la projection p_k sur F_k parallèlement à $G_k = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{m} Ker(u-\lambda_j \cdot Id_E)^{\alpha_j}$

$$E = F_k \oplus G_k$$

Par le lemme de décomposition des noyaux, on a aussi :

$$G_k = Ker(Q(u)) \quad \text{avec } Q = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{m} (X-\lambda_j)^{\alpha_j}$$

λ_k n'est pas racine de Q, donc Q et $(X-\lambda_k)^{\alpha_k}$ sont premiers entre eux

$\exists\, V, W \in \mathbb{K}[X]$ tq

$$VQ + W(X-\lambda_k)^{\alpha_k} = 1$$

On évalue en u.

$$Id_E = \underbrace{V(u) \circ Q(u)}_{=p} + \underbrace{W(u) \circ (u-\lambda_k Id_E)^{\alpha_k}}_{=q}$$

donc pour $x \in E$, $x = p(x) + q(x)$

montrons que $p(x) \in F_k$ puis $q(x) \in G_k$

- $(u-\lambda_k Id)^{\alpha_k}(p(x)) = ((u-\lambda_k Id)^{\alpha_k} \circ V(u) \circ Q(u))(x)$

$$= (V(u) \circ \underbrace{(u-\lambda_k Id)^{\alpha_k} \circ Q(u)}_{\chi_u(u) = 0})(x)$$

$$= 0_E$$

donc $p(x) \in F_k$

- $(Q(u)(q(x)) = (Q(u) \circ W(u) \circ (u-\lambda_k Id_E)^{\alpha_k})(x)$

$$= (W(u) \circ \underbrace{Q(u) \circ (u-\lambda_k Id)^{\alpha_k}}_{\chi_u(u) = 0})(x)$$

$$= 0_E$$

donc $q(x) \in G_k$.

d'où p est la projection sur F_k // à G_k

c'est donc l'endomorphisme qu'on recherchait.

Enfin par construction $p = V(u) \circ Q(u)$, c'est un polynôme en u.

b) L'endomorphisme d est diagonalisable car toute base de E adaptée à la décomposition $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_m$ est formée des vecteurs propres de d (F_k correspondent aux espaces propres de d)

d est un polynôme en u comme combinaison linéaire de polynômes en u

Donc d commute avec u.

d'où comme $n = u - d$, d commute avec n.

n est aussi un polynôme en u.

On a par construction $u = n + d$.

Reste à vérifier que n est nilpotent.

$\forall k \in [\![1, m]\!]$, F_k est stable par n car c'est le noyau d'un endomorphisme qui commute avec n.

$\forall x \in F_k \quad n(x) = u(x) - d(x) = u(x) - \lambda_k x = (u - \lambda_k Id)(x)$

$$\text{donc } n^{\alpha_k}(x) = n^{\alpha_k - 1}\Big(\underbrace{(u - \lambda_k Id)(x)}_{\in F_k}\Big) = n^{\alpha_k - 2}\Big(\underbrace{(u - \lambda_k Id)^2(x)}_{\in F_k}\Big)$$

$$= \dots = (u - \lambda_k Id)^{\alpha_k}(x) = 0 \quad \text{car } x \in F_k.$$

On pose $\alpha = \max_k (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ alors $n^{\alpha}(x) = 0_E$ pour tout $x \in F_k$ $\forall k$.

donc par linéarité le résultat est vrai pour $x \in E = \bigoplus_{k=1}^{m} F_k$

donc n est nilpotent.

c) Unicité. Soit (d', n') un autre couple solution.

d' commute avec n' donc aussi avec $u = d' + n'$

et aussi avec d car d polynôme en u!

or d et d' sont diagonalisables, par co-diagonalisation, } Δ

ils sont simultanément diagonalisables.

En particulier $d-d'$ est diagonalisable.

et n' commute avec u, donc aussi avec n (polynôme en u)

or n et n' sont nilpotents.

On pose α et α' indice de nilpotence de n et n'

$$(n'-n)^{\alpha+\alpha'} = \sum_{k=0}^{\alpha+\alpha'} \binom{\alpha+\alpha'}{k} (-1)^k n'^{\alpha+\alpha'-k} n^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\alpha} (-1)^k \binom{\alpha+\alpha'}{k} \underbrace{n'^{\alpha+\alpha'-k}}_{=0} n^k + \sum_{k=\alpha+1}^{\alpha+\alpha'} (-1)^k \binom{\alpha+\alpha'}{k} n'^{\alpha+\alpha'-k} \underbrace{n^k}_{=0}$$

$$= 0$$

donc $n-n'$ est nilpotent.

donc $d-d' = n'-n$ diagonalisable ⊕ nilpotent

$\rightarrow$ endomorphisme nul !

$$\begin{cases} d = d' \\ n = n' \end{cases}$$

Ex décomposition de Dunford. Rombaldi expo 01 p111

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$