Exercices : Séries entières et fonctions développables en série entière.

Ex de Dénombrement

Monier Analyse MP p.602
~~Dauthnet~~ p 330

Dénombrement de parenthésages

On note a_n le nombre de parenthésages sur un couple de n éléments $x_1, \ldots, x_n$ d'un ensemble E muni d'une loi de composition interne (non associative)

a) Pour n compris entre 0 et 4, exprimer le nombre de parenthésages.

b) Montrer que $\forall n \geq 2$, $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$

c) On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, on suppose que son rayon $R > 0$, on note S sa somme

Mq $\forall x \in]-R, R[$, $(S(x))^2 - S(x) + x = 0$

d) 1) mq $f : x \mapsto \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x})$ est DSE(0) et calculer son DSE(0)

2) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$

a)

n	0	1	2	3	4
parenthésages		(x_1)	$(x_1 x_2)$	$(x_1 x_2) x_3$ $\quad x_1 (x_2 x_3)$	$((x_1 x_2) x_3) x_4$ $\quad (x_1 (x_2 x_3)) x_4$ $\quad (x_1 x_2)(x_3 x_4)$ $\quad x_1 (x_2 (x_3 x_4))$ $\quad x_1 ((x_2 x_3) x_4)$
a_n	0	1	1	2	5

b)

Pour parenthéser $x_1 \ldots x_n$ ($n \geq 2$) on groupe dans un premier parenthésage $x_1 \ldots x_k$ d'une part et $x_{k+1} \ldots x_n$ de l'autre.

dans $x_1 \ldots x_k$, il y a a_k regroupements

$x_{k+1} \ldots x_n$, — a_{n-k} —

d'où $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$

c) $\forall x \in]-R,R[\quad S(x) = x + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n$

$$S(x) = x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \right) x^n$$

On a un produit de Cauchy de deux séries abs cvg^t, d'où

$$S(x) = x + \left(\sum_{n=2}^{+\infty} (a_n) x^n \right) \left(\sum_{n=2}^{+\infty} (a_n) x^n \right)$$

$$S(x) = x + (S(x))^2$$

d) 1) f est DSE(0) par DSE de $\sqrt{1-4x}$

on va utiliser la formule $(1+x)^\alpha$ binôme généralisé

$$\forall |x|<1 \quad (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \alpha \in]0,1[$$

$$\text{avec } \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

ici $\sqrt{1-4x} \Rightarrow |-4x| < 1$ donc $|x| < \frac{1}{4}$

d'où f est DSE(0) sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} (-1)^n (4x)^n\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{3}{2}-n\right)}{n!} (-1)^n (4x)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{3-2n}{2}\right)}{n!} (-1)^n (4x)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{n} \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2^{n+1}\, n!} (4x)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2^{n+1}\, n!} \times \frac{2^{n-1}(n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}\, 2^{2n} x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\, n!} \frac{2^{2n}}{2^{2n}} x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\, n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n-2}{n-1} x^n$$

Notons

4) $b_0 = 0$ et $b_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$

Idée $f(x)^2 - fx + x = 0$

$\Delta = 1 - 4x$

$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$

d'où $f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right)$

Comme f vérifie $\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$

$(f(x))^2 - f(x) + x = 0$

(b_n) satisfait la même condition de récurrence que (a_n)

$b_0 = 0$, $b_1 = 1$ et $b_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$

d'où $a_n = b_n$.