Croissances comparées

On part de $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}$

preuve : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$ $\ln t < \sqrt{t}$

donc $\forall t > 1$ $0 < \frac{\ln t}{t} < \frac{\sqrt{t}}{t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \to 0$

Extension $f : [a;+\infty[\to \mathbb{R}$ $\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$

t assez grand $f(t) > 0$ alors

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln f(t)}{f(t)} = 0$$

Pour $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t^\alpha$ $\to$ $\boxed{\forall \beta > 0 \ \forall \gamma > 0 \ \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)^\beta}{t^\gamma} = 0}$

Extension $f :]0,b[\to \mathbb{R}$ $\lim_{t\to0^+} f(t) = +\infty$

pour t assez petit $f(t) > 0$ $\lim_{t\to0^+} \frac{\ln f(t)}{f(t)} = 0$

Pour $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{t}$ $\boxed{\forall \alpha > 0 \ \forall \beta \in \mathbb{R} \ \lim_{t\to0^+} t^\alpha (\ln t)^\beta = 0}$

$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(e^t)}{e^t} = 0$ donc $\lim_{t\to+\infty} t e^{-t} = \lim_{t\to-\infty} t e^{t} = 0$

$$\boxed{\forall \alpha > 0 \ \forall \beta \in \mathbb{R} \ \forall \gamma > 0 \ \lim_{t\to+\infty} t^\beta e^{-\alpha t^\gamma} = 0}$$

Par généralisation $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$, si le coeff dominant de Q est négatif

alors $$\lim_{t \to +\infty} P(t)\, e^{Q(t)} = 0$$