Critères de Cauchy et de d'Alembert

La série géométrique $\sum r^n$ converge pour $|r|<1$. Les critères de Cauchy et de d'Alembert permettent de comparer une série à termes positifs avec des séries géométriques.

Théorème (critère de Cauchy). Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs ou nuls

i) s'il existe une constante $r<1$ et un entier n_0 tq

$$\forall n \geq n_0 \quad \sqrt[n]{u_n} < r < 1 \text{ alors } \sum u_n \text{ converge}$$

ii) s'il existe un entier n_0 tq $\forall n \geq n_0$ $\sqrt[n]{u_n} > 1$, alors $\sum u_n$ diverge

Preuve : cas i) $\sqrt[n]{u_n} < r \Leftrightarrow u_n < r^n$

si $0<r<1$ alors $\sum r^n$ converge d'où le résultat

ii) $\sqrt[n]{u_n} > 1 \Rightarrow u_n > 1$

le terme général ne tend pas vers 0 donc la série diverge

Corollaire Soit $\sum u_n$ série à termes positifs tq $\sqrt[n]{u_n}$ converge vers ℓ.

i) si $\ell<1$ alors $\sum u_n$ converge

ii) si $\ell>1$ alors $\sum u_n$ diverge

Si $\sqrt[n]{u_n}$ converge vers 1, on ne peut pas conclure en général.

Preuve : i) si $\ell<1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{u_n} < \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{\ell+1}{2} < 1$$

premier cas du théorème, $\sum u_n$ converge

ii) si $\ell>1$ alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{u_n} > \ell - (\ell-1) = 1$$

et on applique le théorème.

Théorème (critère de d'Alembert)

Soit $\sum u_n$ série d'termes strictement positifs

- s'il existe une constante $r<1$, un entier n_0 tq $\forall n \geq n_0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < r < 1 \text{ alors } \sum u_n \text{ converge}$$

- s'il existe un entier n_0 tq $n \geq n_0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \text{ alors } \sum u_n \text{ diverge}$$

Preuve : par récurrence $\frac{u_{n+1}}{u_n} < r \Rightarrow u_n < u_{n_0} r^{-n_0} r^n$

si $0 < r < 1$ alors $\sum r^n$ converge.

si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, la suite (u_n) est croissante _ elle ne tend pas vers 0, donc la série diverge.

Corollaire : Soit $\sum u_n$ série d'termes positifs tq $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers ℓ

- si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge
- si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge

Preuve : par définition de la limite, si $\ell < 1$, alors $\exists n_0$ tel $\forall n \geq n_0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \frac{\ell+1}{2} = \frac{\ell+1}{2} < 1$$

on applique le th.

si $\ell > 1$, $\exists n_0$ $\forall n \geq n_0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \ell - (\ell - 1) > 1$$, on applique le th.

Propo = Soit (u_n) suite d'termes positifs

Si $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ alors $\sqrt[n]{u_n} \to \ell$

Preuve = pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$

$$\ell - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \varepsilon$$

Par récurrence

$$u_{n_0}(\ell-\varepsilon)^{n-n_0} < u_n < u_{n_0}(\ell+\varepsilon)^{n-n_0}$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_{n_0}(\ell-\varepsilon)^{n-n_0}} = \ell-\varepsilon$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_{n_0}(\ell+\varepsilon)^{n-n_0}} = \ell+\varepsilon$

donc $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ $n_1 > n_0$ $\forall n > n_1$

$$\ell - 2\varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \ell + 2\varepsilon$$

Attention, un critère peut s'appliquer et l'autre échouer

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{2^k}{3^k} & si\ n = 2k \\ \dfrac{2^k}{3^{k+1}} & si\ n = 2k+1 \end{cases}$$

le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & si\ n\ est\ pair \\ 2 \end{cases}$