Critères de Cauchy

- Suite de Cauchy :

Une suite est dite de Cauchy si
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \forall p \geq N \quad |u_n - u_p| \leq \varepsilon$$

Une suite de nombres réels est convergente ssi elle est de Cauchy.
On dit que $\mathbb{R}$ est complet

- Règle de Cauchy pour les séries.

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose que $u_n^{1/n} \to \ell$ où $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge, si $\ell > 1$ alors la série diverge

- Critère de Cauchy pour les séries

La série $\sum u_n$ converge ssi la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles est de Cauchy, ce qui s'écrit
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall q \geq p \geq N \quad \left| \sum_{n=p}^{q} u_n \right| < \varepsilon$$