Compléments sur les anneaux

Déf : On appelle anneau tout ensemble A muni de deux lois appelées addition et multiplication tq :

1) l'addition est une loi de groupe commutative sur A
2) la multiplication est associative
3) la multiplication est distributive par rapport à l'addition

$$\forall x, y, z \in A \quad x(y+z) = xy + xz$$
$$\text{et} \quad (y+z)x = yx + zx$$

4) Pour la multiplication, A possède un élément neutre, noté 1

A est commutatif si la multiplication est commutative

ex $(\mathcal{F}(X, A), +)$ est un groupe abélien.

élément neutre : fonction constante $x \mapsto 1$

si $f, g \in \mathcal{F}(X, A)$ fg tel que $(fg)(x) = f(x)g(x)$ $\forall x \in X$

alors $(\mathcal{F}(X, A), +, \times)$ est 1 anneau.

Dans un anneau $(A, +, \times)$ a et b 2 éléments qui commutent

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

On a immédiatement pour $a = b = 1$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

$a = 1$ et $b = -1$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

Déf : Soit $(A, +, \times)$ anneau et $x \in A$

1) On dit que x est inversible s'il possède un inverse x^{-1} pour la multiplication. On note l'ensemble des inversibles $A^\times$

2) x est dit idempotent si $x^2 = x$. On dit qu'il est nilpotent si l'une de ses puissances est nulle.

Dans un anneau A, l'ensemble $A^\times$ des éléments inversibles contient 1 il est multiplicativement stable. On munit $A^\times$ de la multiplication induite par celle de A. Alors $1 \in A^\times$ qui est alors l'élément neutre

si $x \in A^\times$ alors $x^{-1} \in A^\times$

$\therefore$

$(A^\times, \times)$ est un groupe, groupe des éléments inversibles de A

__Déf__ Un anneau $(A, +, \times)$ est dit __intègre__ s'il est commutatif, si $0 \neq 1$ et si le produit de deux éléments non nuls quelconques de A est non nul.

__Prop.__ Soit $(A, +, \times)$ anneau et $x \in A$. On suppose (au moins) que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

1) l'élément x de A est inversible

2) l'anneau A est intègre et $x \neq 0$

Alors x est régulier. $\forall y, z \in A$

$$(xy = xz) \Rightarrow (y = z) \qquad (yx = zx) \Rightarrow (y = z)$$

__Prop__ Dans un anneau intègre, les seuls éléments idempotents sont 0 et 1 et le seul élément nilpotent est 0

__Déf :__ On appelle __sous-anneau__ d'un anneau A tout sous-groupe de $(A, +)$ __contenant 1__ et __multiplicativement stable__.

__Déf :__ Soit A un anneau commutatif. On appelle __idéal de A__ tout sous-groupe I de $(A, +)$ vérifiant

$$\forall x \in I \ \forall a \in A \quad ax \in I$$

Prop Dans un anneau commutatif, tout idéal contenant 1 est égal à A
le seul sous-anneau de A qui soit un idéal de A est A.

dém : I idéal de A contenant 1

$a \in A$. On a $a \in A$ et $1 \in I$

alors $a = a \times 1 \in I$ (déf de l'idéal)

d'où $I = A$

Si I est un idéal et un sous-anneau de A, $1 \in I$ (sous-anneau)

donc $I = A$.

Prop le seul sous-anneau de $\mathbb{Z}$ est $\mathbb{Z}$ lui-même. Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont les $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

→ les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont exactement les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$

Déf : Soit A un anneau et S une partie de A.

1) On appelle sous-anneau de A engendré par S l'intersection de tous les sous-anneaux de A contenant S

2) Supposons que A soit commutatif. On appelle idéal de A engendré par S l'intersection de tous les idéaux de A contenant S. Cet idéal sera noté (S)

Déf Morphisme d'anneaux

Soient A et A' deux anneaux. Une application $f : A \to A'$ est appelé morphisme d'anneaux si elle vérifie les conditions :

1) $\forall x, y \in A \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$

2) $\forall x, y \in A \quad f(xy) = f(x) f(y)$

3) $f(1_A) = 1_{A'}$

Prop. $f : A \to A'$ morphism d'anneaux. Si x est un élément inversible de A $f(x)$ est un élément inversible de A'

et $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$

Ainsi $x \mapsto f(x)$ est 1 morphism de groupe de $A^\times$ dans $A'^\times$

Théorème : Soit $f : A \to A'$ morphism d'anneaux

1) L'image $f(B)$ d'un sous-anneau B de A est un sous-anneau de A'. En particulier, $\mathrm{Im}(f) = f(A)$ sous-anneau de A'

2) Si B' est 1 sous-anneau de A', $f^{-1}(B')$ est 1 sous-anneau de A

3) Supposons A commutatif. Le noyau $\mathrm{Ker}(f)$, considéré comme morphism de $(A, +)$ dans $(A', +)$ est un idéal de A.