Compléments sur les fonctions continues par morceaux

Composition

1) $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ et $g \in C_{pm}([c,d],\mathbb{R})$ avec $f([a,b]) \subset [c,d]$

$g \circ f$ continue par morceaux ?

2) $f \in C_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ et $g \in C_{pm}(I,\mathbb{R})$ avec $f([a,b]) \subset I$

$g \circ f$ continue par morceaux ?

Sol. 1) Non, avec une fonct partie entière et 1 fonction qui change de signe une ∞ de fois proche de l'origine.

$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

f continue en 0 car $|f(x) - f(0)| \leq |x|$ continue sur $\mathbb{R}^*$

$g = \lfloor x \rfloor$ cpm.

$h = \lfloor f(x) \rfloor$ sur $\mathbb{R}$ n'a pas de lim à droite

$$\lim_{n\to\infty} h\left(\frac{2}{(4n+1)\pi}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} h\left(\frac{2}{(4n+3)\pi}\right) = -1$$

2) Non $\begin{cases} f(x) = x & x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ sur $[0,1]$ est cpm à valeurs dans $]0,1]$

$g(x) = \frac{1}{x}$ déf sur $]0,1]$ et continue

$\lim_{x\to 0^+} g\circ f(x) = +\infty$ donc $g \circ f$ n'est pas cpm.