Classification des endomorphismes dans $\mathbb{R}_3$.

(Monier Alg MPSI)

$f \in O_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B} = (i, j, k)$ b.o.n.d de $E = \mathbb{R}^3$, $\Omega = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

1°/ Mq $\exists x \in E \setminus \{0\}$ $f(x) = x$ ou $f(x) = -x$ (ie vp $\Omega = \pm 1$)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\exists x \in E \setminus \{0\}$ $f(x) = \lambda x \Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0\}$ $x \in \ker(f - \lambda Id)$

$\Leftrightarrow (f - \lambda Id)$ n'est pas injective

$\Leftrightarrow \det(f - \lambda Id) = 0$

Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\lambda \mapsto \det(\Omega - \lambda I_3)$ polynôme de degré 3, coeff dominant -1

or P est continue sur $\mathbb{R}$.

et $\begin{cases} \lim_{-\infty} P = +\infty \\ \lim_{+\infty} P = -\infty \end{cases}$ TVI $\Rightarrow \exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$ $P(\lambda_0) = 0$

ccl $\exists \lambda_0 \in \boxed{\mathbb{R}}$, $x_0 \in E \setminus \{0\}$ $f(x_0) = \lambda x_0$ ①

2°/ Valeur de λ_0 ?

$f \in O_3$, isométrie $\|f(x_0)\| = \|x_0\|$ d'où avec ① $|\lambda| = 1$

soit $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in E \setminus \{0\}$ $\lambda = \{-1, +1\}$

$f(x_0) = x_0$ ou $f(x_0) = -x_0$

3°) (Montrons que si F est stable par f alors $F^\perp$ est stable par f.)

Ls plus restrictif ici, on montre que

$I = \dfrac{x_0}{\|x_0\|}$ (unitaire, nous servira pour construire une base)

$f(I) = f\left(\dfrac{x_0}{\|x_0\|}\right) = \dfrac{\lambda_0 x_0}{\|x_0\|}$ d'où $\dfrac{x_0}{\|x_0\|} = \dfrac{f(I)}{\lambda_0}$

Rq I stable par f.

Soit $H = I^{\perp}$, déjà $\dim H = 2$. Mq H stable par f.

$$\forall y \in H, \quad \langle f(y), I \rangle = \langle f(y), \frac{x_0}{\|x_0\|} \rangle$$
$$= \langle f(y), \frac{1}{\lambda_0} f(I) \rangle \quad \text{(calcul précédent)}$$
$$= \frac{1}{\lambda_0} \langle f(y), f(I) \rangle \quad \text{(lin)}$$
$$= \frac{1}{\lambda_0} \langle y, I \rangle \quad \text{(isométrie)}$$
$$= 0 \quad \text{car } y \in I^{\perp}$$

donc $y \in H$ alors $f(y) \in H$, H stable par f.

4°/ On s'intéresse à l'endo g de H induit par f.

$$g : H \to H$$
$$y \mapsto f(y)$$

On munit H du produit vectoriel de E restreint à $H \times H$ - et prenons une bon (J, K) sur H.

(J, K) bon sur H

<u>Mq</u> $f \in O_3 \Rightarrow g \in O_2$

$$\forall (y, z) \in H \quad \langle g(y), g(z) \rangle_H = \langle f(y), f(z) \rangle_H = \langle f(y), f(z) \rangle_E$$
$$= \langle y, z \rangle_E \quad \text{(iso)}$$
$$= \langle y, z \rangle_H$$

D'après l'étude de la dimension 2, 2 possibilités.

* soit g est une rotation

* soit g est une réflexion.

<u>4 cas</u> (selon λ_0 et g)

A] $\lambda_0 = 1$ et g rotation, f s'écrit dans (I, J, K) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$ $\theta \in \mathbb{R}$

B] $\lambda_0 = 1$ et g réflexion

Notons J' (resp K') l'espace normé dirigé par <u>$\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$</u>

(resp <u>$\operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$</u>) alors dans (I, J', K') bon

f s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

cel $\|$ f est 1 réflexion par rapport au plan vectoriel engendré par (I, J')

c) $d_0 = -1$ et g réflexion.

Même rotation que B), base (I, J', K'). f s'écrit $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

f symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle engendrée par J'

Rq si on écrit f dans (J', I, K') (chgt base) $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$, rotation vectoriel dirigée par J' et d'angle π

D) $d_0 = -1$, g rotation.

f dans (I, J, K) est de la forme $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$ $\theta \in \mathbb{R}$.

et on peut écrire

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S_P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{R_{\vec{\Delta}, \theta}}.$$ ⊕ commutatif

avec $R_{\vec{\Delta},\theta} = Rot_\theta(p_{u^\perp}(x)) + p_{\mathbb{R}u}(x)$ $u^\perp$ orienté par base directe (v, w)

d'où ccl det $f = +1$, cas 1 et 3 $\Rightarrow$ rotation de E

det $f = -1$, cas 2 et 4

- réflexion.
- composée d'1 rotation et réflexion par rapport au plan $\perp$ à l'axe de rotation