Griffon

Prop $A \in O_3(\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{L}(E)$ de $\mathbb{R}^3$ tq $A = \mathrm{Mat}_{(e_i)}(f)$ en base canonique

$\exists$ une base (e_1', e_2', e_3') de $\mathbb{R}^3$, orthonormée tq

$$A' = M(f)_{e_i'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

où $\varepsilon = +1$ si $\det A = 1 \iff A \in SO_3(\mathbb{R})$

$\varepsilon = -1$ si $\det A = 1 \iff A \notin SO_3(\mathbb{R})$

Preuve = • si $A = \pm I_3$, résultat trivial, prendre $\{e_i\}$ la base canonique

et $\theta = 0$ si $A = I$

$\theta = \pi$ si $A = -I$.

Trois étapes = 1) s'intéresser aux valeurs propres de f selon les valeurs du déterminant ⊕ multiplicité.

2) avec les valeurs propres, dim espace propre

3) Regarder les invariants et la description de f sur ces invariants.

1) si $\det A = 1$ alors $\lambda = 1$ est valeur d'ordre 1 ou 3

$\det A = -1$ alors $\lambda = -1$ est valeur propre d'ordre 1 ou 3.

→ pour $\det A = 1$, A] si les 3 vp sont réelles

$$\begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det A = 1 \\ \lambda_i = \pm 1 \end{cases}$$

alors $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ et } \lambda_2 = \lambda_3 = -1 \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \end{cases}$

B] l'une est réelle (polynôme de deg 3)

si l'une est complexe, on la note μ, $\bar{\mu}$ est aussi valeur propre puisque A est réelle

$\det A = \lambda \mu \bar{\mu} = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$ mais $|\mu| = 1$

d'où $\lambda > 0$ alors $\lambda = 1$

d'où le résultat. $\lambda=1$ de multiplicité 1 ou 3

2) Si $\det A = 1$ alors $\dim E_1 = 1$

Si $\det A = -1$ alors $\dim E_{-1} = 1$

• Supposons $\det A = 1$, $\lambda = 1$ vp simple ou triple.

Si $\dim E_1 = 3$ alors $E_1 = \mathbb{R}^3$ donc $A = I \to$ exclu.

Supposons que $\dim E_1 = 2$ (et $\lambda=1$ vp triple)

soit $\{v_1, v_2\}$ base de E_1

soit $\omega \in \text{Vect}(v_1, v_2)^\perp$, $\omega \neq 0$

$$\langle f(\omega), v_i \rangle \underset{f(v_i)=v_i}{=} \langle f(\omega), f(v_i) \rangle = \langle \omega, v_i \rangle \underset{\perp}{=} 0 \quad \forall i = 1,2$$

donc $f(\omega) \in \text{Vect}(v_1, v_2)^\perp$ d'où $f(\omega) \in \text{Vect}\{\omega\}$

(on a démontré que f était stable sur $\perp$)

$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$ tq $f(\omega) = \lambda_0 \omega$

car 1 est vp triple $\lambda_0 = 1$ et $f(\omega) = \omega$

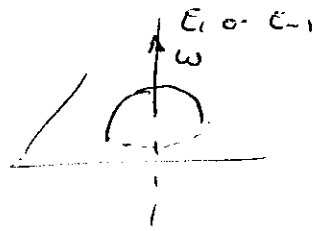
d'où $\omega \in E_1 \to$ exclu car $\omega \in E_1^\perp$.

donc $\underline{\dim E_1 = 1}$

m̄ raisonnement pour $\det A = -1$.

3) Si $\det A = 1$ alors $\Pi = E_1^\perp$ est invariant par f et $f|_\Pi$ rotation

$\det A = -1$ — $\Pi = E_{-1}^\perp$ —



Soit $\underline{x \in \Pi}$, $\omega \in E_1$ ou E_{-1}

$\langle x, \omega \rangle = 0$. par déf

or f est orthogonale, $\langle f(x), f(\omega) \rangle = 0$

or $f(\omega) = \pm \omega$ selon $\omega \in E_1$ ou E_{-1}

$\langle f(x), \omega \rangle = 0$ donc $f(x) \in \Pi$

Π est stable par f.

Sol $\hat{f} = f_{|\Pi}$ $\forall x,y \in \Pi$ $\langle \hat f(x), \hat f(y)\rangle_\Pi = \langle f(x), f(y)\rangle_E = \langle x,y\rangle_E = \langle x,y\rangle_\Pi$

donc $\hat f$ est orthogonal.

Rq $\det \hat f = 1$

→ si $\{v_1, v_2\}$ base de Π on a $e = M(f)_{v_1,v_2,\omega} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$

avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = M(\hat f)_{v_1,v_2}$

$\varepsilon = \pm 1$ selon que $\det A = \pm 1$ ($\varepsilon = \det A$)

or $\det e = \det A$ car le déterminant est un invariant par chgt de base

d'où $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \varepsilon = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \det A$

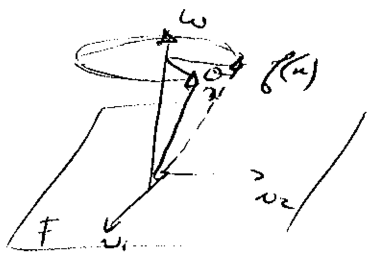
donc $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$ et $\hat f$ est une rotation.

d'où $\exists$ une base orthonormée (e'_1, e'_2, e'_3) avec $\left(\begin{array}{l} e'_1 \text{ et } e'_2 \in \Pi \\ e'_3 \in E_1 \text{ ou } E_{-1} \end{array} \right)$

tq $M(f)_{e'_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$

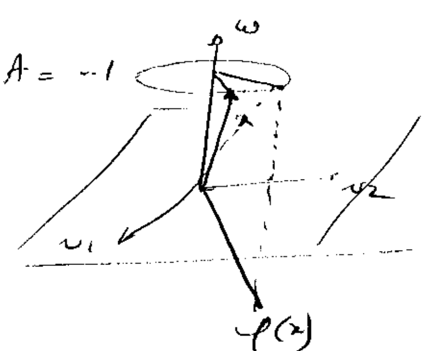
avec $\varepsilon = \det A$.

si $\det A = 1$



rotation autour de E_1

$\det A = -1$



rotation autour de E_1
⊕ symétrie orthogonale $E_{-1}^{\perp}$

ccl $A \in O_3(\mathbb{R})$ $A \neq Id$.

si $\det A = 1$, rotation autour de l'axe E_1, l'angle non orienté est tq $Tr(A) = 2\cos\theta + 1$

si $\det A = -1$, rotation autour de E_{-1} puis sym. orthogonale par rapport à $E_{-1}^{\perp}$

l'angle non orienté est $Tr\, A = 2\cos\theta - 1$

cas particulier $Tr\, A = 1$, $\theta = 0$, sym. $\perp$ % $E_{-1}^{\perp}$ (réflexion)

Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Mq valeurs propres complexes de M sont de module 1.

Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$, on a ${}^tM M = I_n$

$${}^tM = M^{-1}$$

Soit λ vp complexe de M

$\exists X$ vecteur propre complexe non nul tq $MX = \lambda X$

or $M \in O_n(\mathbb{R})$ $\overline{M} \in O_n(\mathbb{R})$

$\overline{M} = M$.

$$\begin{aligned}
\text{D'où } MX = \lambda X &\iff \overline{MX} = \overline{\lambda X} \\
&\iff \overline{M}\,\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X} \\
&\iff M\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X} \\
&\iff \overline{X} = \overline{\lambda} M^{-1}\overline{X} = \overline{\lambda}\,{}^tM\overline{X}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
MX = \lambda X &\iff {}^t(MX) = {}^t(\lambda X) \\
&\iff {}^tX\,{}^tM = \lambda\,{}^tX. \\
&\iff {}^tX = \lambda\,{}^tX\,{}^tM^{-1} \\
&\iff {}^tX = \lambda\,{}^tX M
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d'où } {}^tX\overline{X} &= (\lambda\,{}^tX M)(\overline{\lambda}\,{}^tM\overline{X}) \\
&= \lambda\overline{\lambda}\,{}^tX M\,{}^tM\overline{X} \\
&= |\lambda|^2\,{}^tX\overline{X} \quad (1)
\end{aligned}$$

comme $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ alors ${}^tX\overline{X} \neq 0$

$(1) \iff |\lambda|^2 = 1 \iff |\lambda| = 1$